فصل ۵:

المان های تزویج دار (سلف و ترانسفورمر) و مدارهای سه فاز

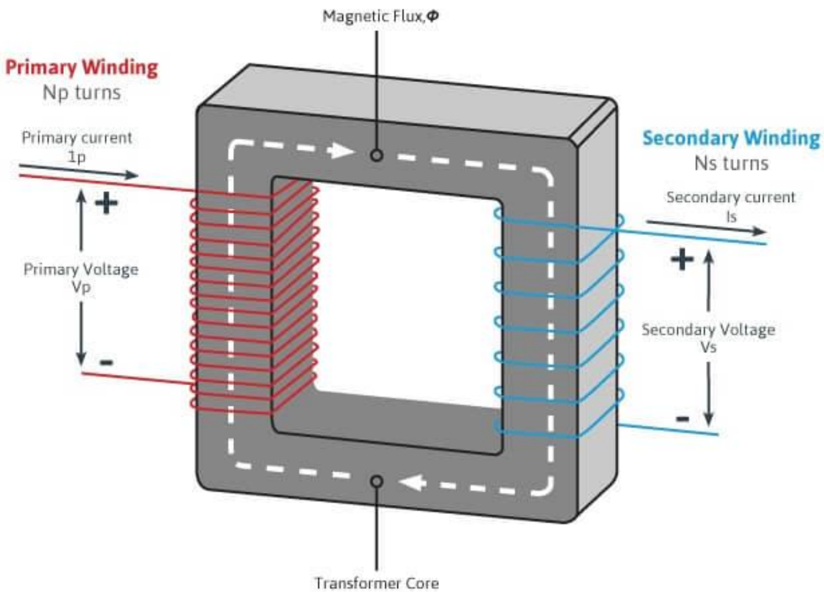
۵-۱- مفهوم تزویج و روابط مربوط به سلف؛

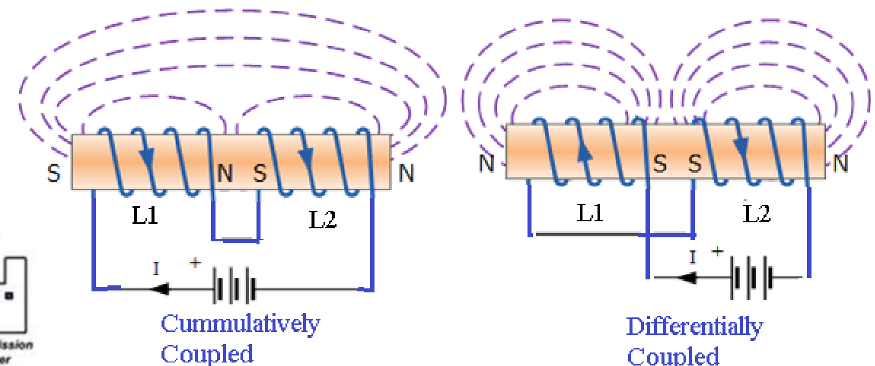
۵-۲- ترانسفورمر ایده آل؛

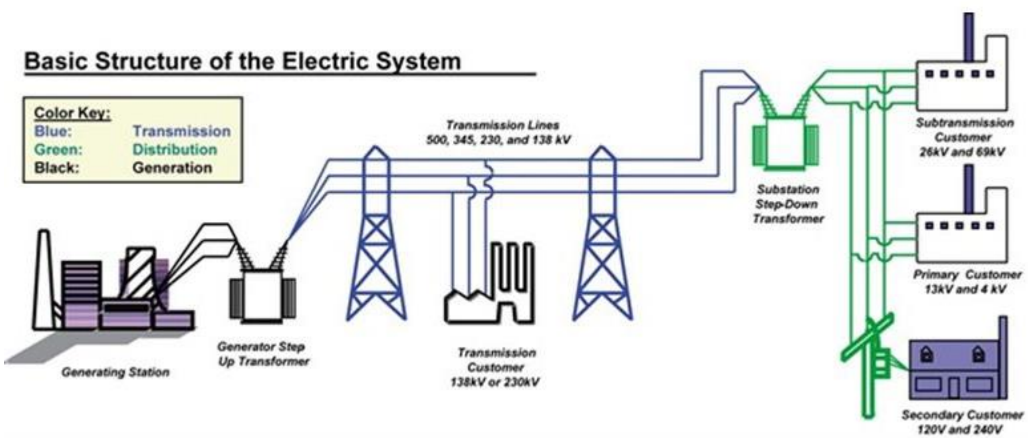
۵-۳- اتوترانسفورمر؛

۵-۴- مدارهای سه فاز؛

۵-۵- نکات تکمیلی و پیوست ها؛



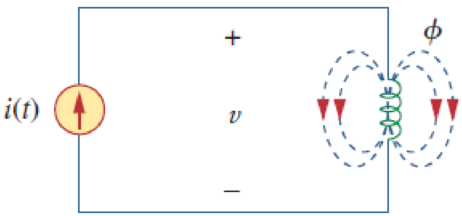




۵–۱– مفهوم تزویج و روابط مربوط به سلف

❑ المان هایی مانند مقاومت، سلف، و خازن، عناصر دو سر هستند و توسط روابطی که ولتاژ و جریان شاخه را به یکدیگر ارتباط می دهند، توصیف می شوند. سلف های تزویج شده، ترانسفورماتورها و منابع وابسته عناصر چند سر هستند و ولتاژ و جریان یک شاخه به ولتاژها و جریان شاخه‌های دیگر مربوط است. در این فصل، سلف های تزویج شده و ترانسفورماتور ایده آل را معرفی می کنیم که بیش از یک شاخه دارند و جریان و ولتاژ یک شاخه به جریان و ولتاژ شاخه های دیگر مربوط است.

❖ تعریف و روابط سلف منفرد:

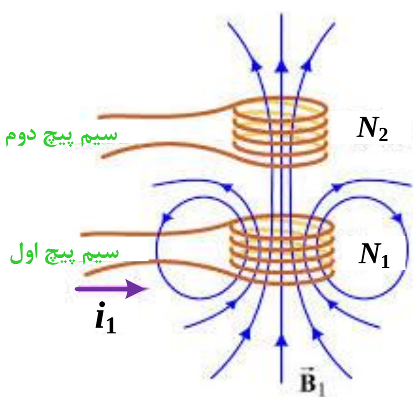


ابتدا یک سلف سیم‌پیچی شده را با N دور در نظر بگیرید. وقتی جریان i از سیم‌پیچی بگذرد، شار مغناطیسی ϕ در اطراف تولید خواهد شد. ولتاژ القا شده در سیم چیچ براساس قانون القای فاراده برابر است با (هر تغییر در شار، ناشی از تغییر در جریان است و بلعکس):

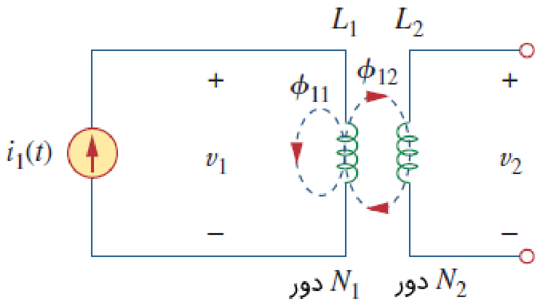
$$v = N\frac{d\phi}{dt} \quad => \quad v = N\frac{d\phi}{di}\,\frac{di}{dt} \quad => \quad \begin{cases} v = L\dfrac{di}{dt} \\ L = N\dfrac{d\phi}{di} \end{cases}$$

این اندوکتانس، معمولاً "اندوکتانس خودی" یا Self-inductance نامیده می‌شود، زیرا ولتاژ القا شده در سیم‌پیچ، با جریان متغیر همان سیم‌پیچ ایجاد شده است.

❖ تعریف و روابط سلف های تزویج شده LTI:



دو سیم پیچ واقعی که در مجاورت هم قرار گرفته اند را در نظر بگیرید. این سیم پیچ ها ممکن است به دور یک هسته مغناطیسی پیچیده شده باشند یا در هوا باشند. فرض می کنیم که سلف ها حرکت نداشته، LTI بوده و شار آن ها تابع خطی جریان است. عبور جریان از سیم پیچ اول، باعث می شود که میدان مغناطیسی در سیم پیچ اول و اطراف آن تشکیل شود. سیم پیچ دوم، خطوط میدان سیم پیچ اول را قطع می کند و لذا تزویج مغناطیسی میان دو سیم پیچ وجود دارد. بلعکس، اگر جریان از سیم پیچ دوم عبور کند، خطوط میدان مغناطیسی سیم پیچ دوم، سیم پیچ اول را قطع خواهد کرد (یعنی به شکل متقابل، تزویج[2] داریم).



دو سیم‌پیچ را با اندوکتانس خودی L_1 و L_2 در نظر بگیرید که نزدیک یک‌دیگر هستند. تعداد دور سیم‌پیچ‌های ۱ و ۲، به‌ترتیب، برابر با N_1 و N_2 است. برای سادگی فرض کنید در سلف دوم جریانی برقرار نیست. شار مغناطیسی ϕ_1 که از سیم‌پیچ ۱ نشئت می‌گیرد، دو مؤلفه دارد؛ مؤلفه ϕ_{11} که فقط از سیم‌پیچ ۱ عبور می‌کند و مؤلفه ϕ_{12} که هر دو سیم‌پیچ را احاطه می‌کند. بنابراین:

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

اگرچه دو سیم‌پیچ از نظر فیزیکی مجزا هستند، اما از نظر مغناطیسی تزویج دارند. از آن‌جایی که شار کل ϕ_1 در سیم‌پیچ ۱ حلقه می‌بندد، ولتاژ القا شده در سیم‌پیچ ۱ برابر است با:

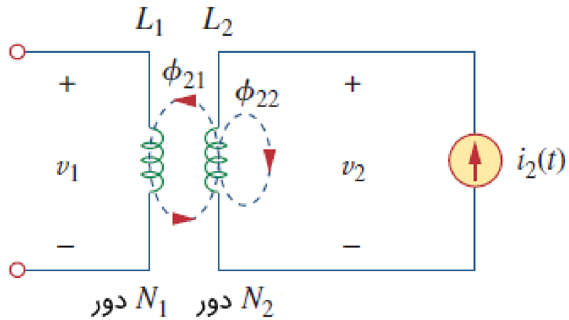
$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \quad => \quad v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{di_1}\frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

خطوط شار ϕ_{12}، از سیم‌پیچ ۲ می‌گذرند، بنابراین، ولتاژ القا شده در سیم‌پیچ ۲ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} \quad => \quad \begin{cases} v_2 = N_2 \dfrac{d\phi_{12}}{di_1}\dfrac{di_1}{dt} = M_{21}\dfrac{di_1}{dt} \\ M_{21} = N_2 \dfrac{d\phi_{12}}{di_1} \end{cases}$$

مقدار M_{21}، "اندوکتانس متقابل" یا Mutual inductance یا اندوکتانس تزویج سیم‌پیچ ۲ نسبت به سیم‌پیچ ۱ نامیده می‌شود. اندیس ۲۱ نشان می‌دهد که اندوکتانس M_{21}، ولتاژ القایی سیم‌پیچ ۲ را به جریان سیم‌پیچ ۱ مرتبط می‌کند. بنابراین، ولتاژ متقابل (یا ولتاژ القایی) مدار باز سیم‌پیچ ۲ برابر است با:

$$\boxed{v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt}}$$



اکنون فرض کنید جریان i_2 در سیم‌پیچ ۲ برقرار شود، در حالی که از سیم‌پیچ ۱ جریانی عبور نکند. شار ϕ_2 از سیم‌پیچ ۲ ناشی می‌شود. شار ϕ_{22} در سیم‌پیچ ۲ و ϕ_{21} در هر دو سیم‌پیچ برقرار است. بنابراین:

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$$

شار کل ϕ_2، در سیم‌پیچ ۲ حلقه می‌بندد، بنابراین ولتاژ القایی سیم‌پیچ ۲ برابر با رابطه زیر است:

$$v_2 = N_2\frac{d\phi_2}{dt} = N_2\frac{d\phi_2}{di_2}\frac{di_2}{dt} = L_2\frac{di_2}{dt} \qquad M_{12} = N_1\frac{d\phi_{21}}{di_2}$$

مقدار بالا، اندوکتانس متقابل سیم‌پیچ ۱ نسبت به سیم‌پیچ ۲ نامیده می‌شود. بنابراین، ولتاژ متقابل مدار باز سیم‌پیچ ۱ برابر است با:

$$\boxed{v_1 = M_{12}\frac{di_2}{dt}}$$

❖ به صورت خلاصه می توان روابط سلف های تزویج شده را به صورت زیر نوشت **(در واقع اندوکتانس متقابل، توانایی سلف برای القای ولتاژ بر سلف مجاورش است که برحسب هانری بیان می‌شود.):**

$$\varphi_1 = L_{11}i_1 + M_{12}i_2$$

شار سیم پیچ اول — خود القایی سیم پیچ اول — ضریب القاء متقابل

$$\varphi_2 = M_{21}i_1 + L_{22}i_2$$

شار سیم پیچ دوم — ضریب القاء متقابل — خود القایی سیم پیچ دوم

▪ **ثابتهای L_{11}، L_{22}، M_{12} و M_{21} به زمان t و جریان های i_1 و i_2 بستگی ندارند.**

✓ از بررسی انرژی اثبات می شود (**انتهای فصل**) که $M_{12} = M_{21} = M$ پس:

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}L_{11} & M\\ M & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{قانون فاراده}]{\text{مطابق}} \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}L_{11} & M\\ M & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{di_1}{dt}\\ \frac{di_2}{dt}\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نمایش فیزوری}} \begin{array}{l} V_1 = j\omega L_{11}I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_{22}I_2 \end{array}$$

$$v = d\frac{\varphi(t)}{dt}$$

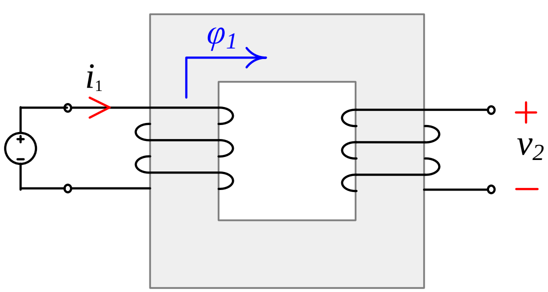
✓ **تذکر:** در حالت پسیو، خودالقایی L_{11} و L_{22} مثبت می باشند ولی ضریب القای متقابل M می تواند مثبت یا منفی باشد.

❖ **تعیین علامت M در مدارهای فیزیکی:** اگرچه اندوکتانس متقابل **M همیشه مثبت** است، ولتاژ متقابل Mdi/dt مانند ولتاژ خودالقایی Ldi/dt ممکن است مثبت یا منفی باشد. بنابراین، علامت M را در حالت های ولتاژ منفی، منفی در نظر می گیرند. اگر جریان های قراردادی متناظر دو سیم پیچ، منجر به شار هم جهت شوند، علامت M مثبت و در غیر این صورت منفی است. بیان این موضوع در مفهوم انرژی این است که اگر جریان ۱ آمپری در هر سلف در جهت قراردادی عبور کند و اگر انرژی ذخیره شده در این شرایط از مجموع انرژی ذخیره شده در حالت هایی که هر یک از جریانهای ۱ آمپری به تنهایی عبور می کردند بزرگتر باشد، ضریب القای متقابل M مثبت است.

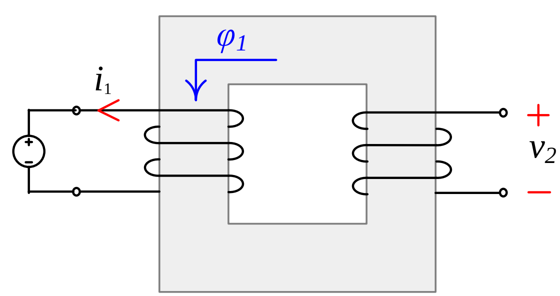
به عنوان مثال، در مدارهای زیر فرض کنید که di_1/dt مثبت و پلاریته v_2 در حالت مدار باز، به صورت نشان داده شده باشد. طبق قانون فاراده $v_2 = M\frac{di_1}{dt}$، آنگاه علامت M باید با علامت v_2 یکی باشد و به صورت های زیر خواهد بود.

- **بنابراین علامت M هم به وضع فیزیکی و هم به جهت های قراردادی انتخاب شده بستگی دارد.**

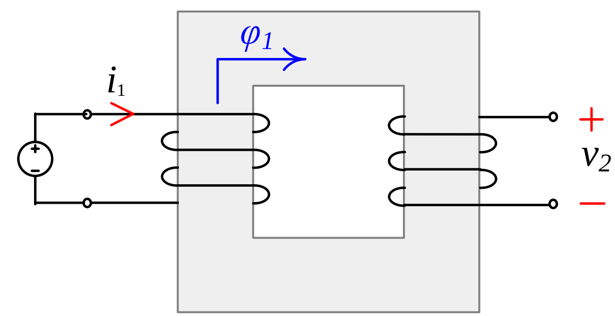
✓ این نکته را با استفاده از روابط انرژی هم می توان اثبات کرد (**اثبات در انتهای فصل**).



M > 0

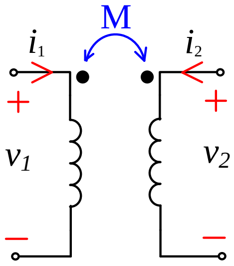


M < 0

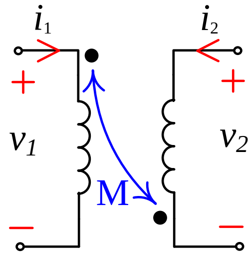


M < 0

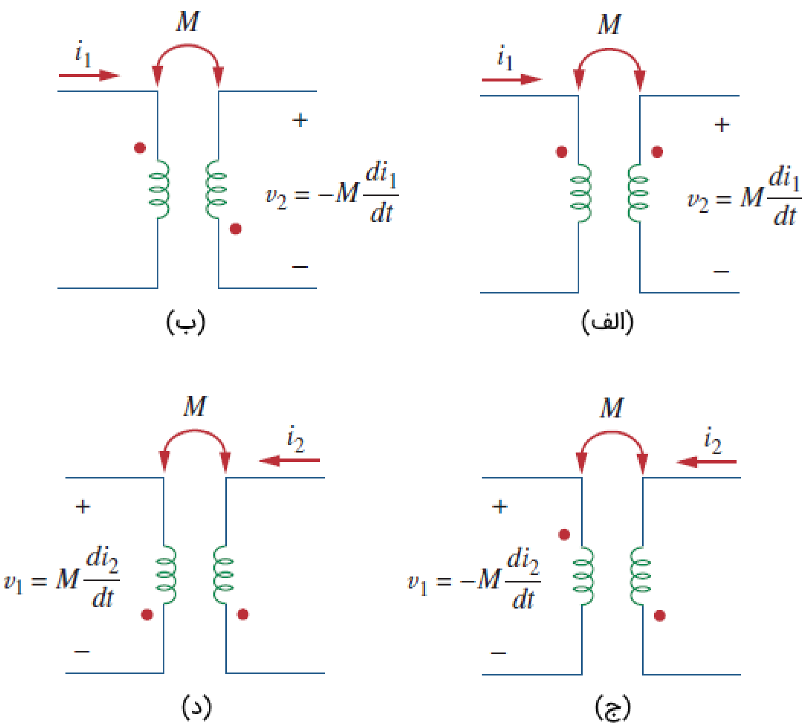
➢ **قرارداد نقطه برای تعیین علامت M:** انتخاب پلاریته صحیح Mdi/dt با اعمال قانون لنز و دست راست به دو سیم‌پیچ تعیین می‌شود. از آن‌جایی که نشان دادن جزئیات ساختار سیم‌پیچ واقعی آسان نیست، از "قرارداد نقطه "Dot convention" در تحلیل مدار استفاده می‌کنیم. با این قرارداد، یک نقطه در یکی از سرهای هر سیم‌پیچ مشخص می‌شود. قرارداد نقطه به این صورت بیان می‌شود: **اگر جریان به سر نقطه‌دار یک سیم‌پیچ وارد شود، پلاریته مرجع ولتاژ متقابل در سیم‌پیچ دوم، در سر نقطه‌دار سیم‌پیچ، مثبت است. اگر جریان از سر نقطه‌دار یک سیم‌پیچ خارج شود، پلاریته مرجع ولتاژ متقابل در سیم‌پیچ دوم، در سر نقطه‌دار سیم‌پیچ، منفی است.** بنابراین، پلاریته مرجع ولتاژ متقابل، به جهت مرجع جریان القاکننده و نقطه سیم‌پیچ‌های تزویج شده بستگی دارد. از شکل مقابل برای نمایش دو سلف با تزویج استفاده می شود. در بیانی دیگر، **اگر جریان های قراردادی متناظر با ولتاژ در دو سیم پیچی از سرهای نقطه دار وارد شوند یا اینکه هر دو از سرهای نقطه دار خارج شوند، علامت M مثبت است وگرنه علامت M منفی است.**



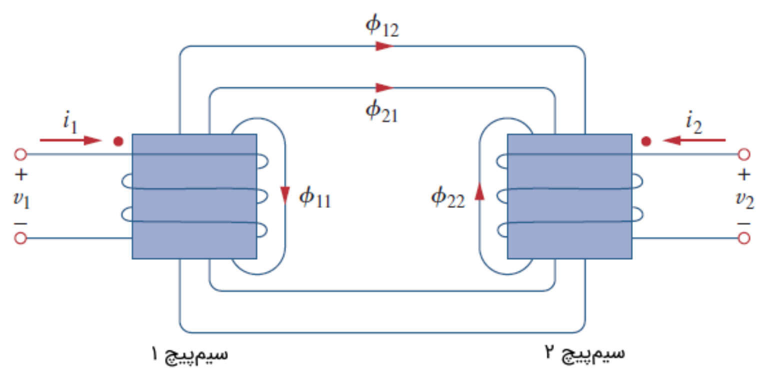
M > 0

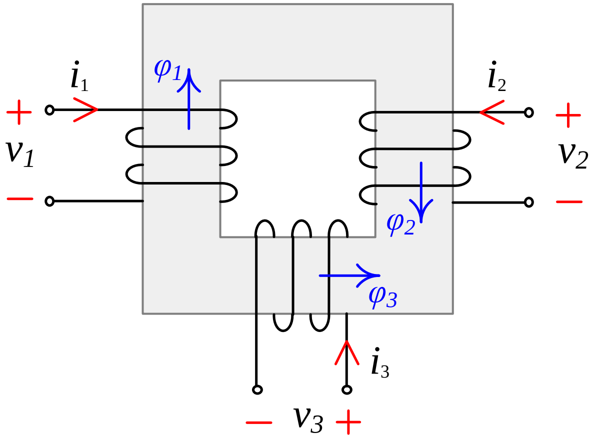


M < 0



▪ مثال‌هایی از استفاده از قانون نقطه





❖ **ضریب تزویج:** سنجشی برای درجه تزویج میان دو سیم پیچی است. بسته به موقعیت دو سیم پیچ نسبت به هم و نوع ماده مغناطیسی ارتباط دهنده، ضریب تزویج بین صفر و یک (نامنفی و مستقل از جهت های قراردادی) می باشد (**اثبات در انتهای فصل**).

$L_{12} > 0$

$L_{13} < 0$

$L_{23} < 0$

$$k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} \quad , \quad 0 < k \leq 1$$

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{12}}{\phi_{11} + \phi_{12}} \qquad k = \frac{\phi_{21}}{\phi_2} = \frac{\phi_{21}}{\phi_{21} + \phi_{22}}$$

اگر دو سلف شدیداً تزویج شده باشند مانند حالتی که دو سیم پیچ بر روی یک هسته پیچیده شده باشند، قسمت اعظم شار مغناطیسی برای دو سلف مشترک بوده و k نزدیک واحد است. نشان خواهیم داد که k همواره کوچکتر یا مساوی ۱ است. اگر دو سلف در فاصله زیادی از هم در فضا قرار داشته باشند، ضریب القای متقابل آن ها بسیار کوچک و نزدیک به صفر است. اگر ضریب k برابر یک باشد، گویند تزویج سلف ها کامل است.

❖ **سلفهای تزویج شده با چند سیم پیچی و ماتریس ضرایب القای آن ها:**

اگر سه سلف با یکدیگر تزویج شوند، رابطه میان شارها و جریان ها یک دسته معادلات خطی خواهند بود:

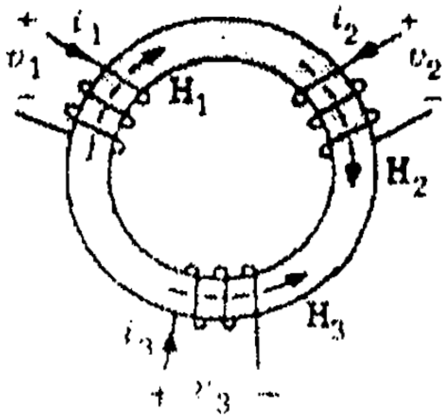
$$\varphi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + L_{13}i_3$$
$$\varphi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 + L_{23}i_3$$
$$\varphi_3 = L_{31}i_1 + L_{32}i_2 + L_{33}i_3$$

ضرایب L_{11} و L_{22} و L_{33} اندوکتانس سیم پیچ ها و $L_{12}= L_{21}$ و $L_{13}= L_{31}$ و $L_{23}= L_{32}$ ضرایب القای متقابل هستند.

در شکل ماتریسی، این روابط چنین نوشته می شود:

$$\varphi = Li => v=L\frac{di}{dt} \quad , \quad \varphi = \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix} , i = \begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{bmatrix} , L = \begin{bmatrix}L_{11} & L_{12} & L_{13}\\ L_{21} & L_{22} & L_{23}\\ L_{31} & L_{32} & L_{33}\end{bmatrix}$$

که L_{11} و L_{22} و L_{33} همواره مثبت هستند و علامت های ضرایب القاء متقابل با بررسی جهت میدان مغناطیسی القاء شده تعیین می شود. دترمینان ماتریس L باید همواره مثبت باشد.



- مثلا در شکل روبرو، سه سیم پیچی روی یک هسته آهنی پیچیده شده اند. جهت های قراردادی ولتاژ و جریان هر سیم پیچ، دلخواه انتخاب شده است. جهت میدان های مغناطیسی ایجاد شده در اثر جریان های مثبتی که از سلف ها می گذرد، به وسیله قانون دست راست تعیین می شود. جهت های H_1 و H_2 یکسان و مخالف جهت H_3 است. $L_{21}=L_{12}$ مثبت، و $L_{13}=L_{31}$ و $L_{23}=L_{32}$ منفی هستند.

❖ ماتریس ضرائب القاء معکوس $\boldsymbol{\Gamma \triangleq L^{-1}}$

از رابطه $\varphi = Li$ می توان نوشت

$$\boldsymbol{i = L^{-1}\varphi = \Gamma\varphi}$$

برای دو سلف تزویج شده داریم:

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{11} & M\\ M & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{12}=\Gamma_{21}=\frac{-M}{Det\ L}\quad ,\Gamma_{22}=\frac{L_{11}}{Det\ L}\quad ,\Gamma_{11}=\frac{L_{22}}{Det\ L}$$

همچنین می توان نوشت:

$$i_1=\Gamma_{11}\int_0^t v_1(t')dt'+\Gamma_{12}\int_0^t v_t(t')dt'+i_1(0)$$

$$i_2=\Gamma_{21}\int_0^t v_1(t')dt'+\Gamma_{22}\int_0^t v_2(t')dt'+i_2(0)$$

- **توجه:** در تجزیه و تحلیل گره چون جریان ها را باید بر حسب ولتاژ ها نوشت، ضرایب القای معکوس مفیدتر هستند.

❑ محاسبه انرژی ذخیره شده در سلف های مزدوج

انرژی مربوط به دو سلف خطی تغییر ناپذیر با جریان های i_1 و i_2 و تزویج M عبارت است از:

$$\varepsilon(i_1,i_2)=\int_0^t(v_1 i_1+v_2 i_2)dt$$

$$=\int_0^t\left(\left(L_{11}\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}\right)i_1+\left(M\frac{di_1}{dt}+L_{22}\frac{di_2}{dt}\right)i_2\right)dt$$

$$=\int_0^t(L_{11}i_1 di_1+Md(i_1 i_2)+L_{22}i_2\,di_2)\quad\boxed{\rightarrow\varepsilon(i_1,i_2)=\underbrace{\frac{1}{2}L_{11}{i_1}^2}_{\text{انرژی ذخیره شده در سیم پیچ اول}}+Mi_1 i_2+\underbrace{\frac{1}{2}L_{22}{i_2}^2}_{\text{انرژی ذخیره شده در سیم پیچ دوم}}}$$

که می توان عبارت بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\boldsymbol{\xi[i_1,i_2]=\varepsilon(i_1,0)+Mi_1.i_2+\varepsilon(0,i_2)}$$

که در آن $\varepsilon(i_1,0)$ انرژی در حالتی است که فقط i_1 جاری شود (یعنی $i_2=0$ باشد). و $\varepsilon(0,i_2)$ انرژی در حالتی است که فقط i_2 جاری شود (یعنی $i_1=0$ باشد).

اگر i_1,i_2 مثبت و $M>0$ باشند، کل انرژی ذخیره شده از مجموع انرژی های ذخیره شده در حالتی که به ترتیب جریان تنهای i_1 و جریان تنهای i_2 عبور می کند، بزرگتر است.

✓ رابطه انرژی را می توان به صورت ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$\varepsilon(i_1,i_2)=\frac{1}{2}I'LI=\frac{1}{2}[i_1\ \ i_2]\begin{bmatrix}L_{11} & M\\ M & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix}$$

➢ رابطه انرژی، به ازای هر تعداد سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان تزویج شده برقرار است.

➢ نا منفی بودن انرژی ذخیره شده در سلف های تزویج شده برای هر بردار جریان دلخواه، ایجاب می کند که ماتریس اندوکتانس L یک **ماتریس مثبت و معین** باشد (Positive Definite). ماتریس L را **مثبت معین** گویند اگر برای هر بردار دلخواه $x \neq 0$ داشته باشیم:

$$x^{\mathrm{T}}Lx > 0$$

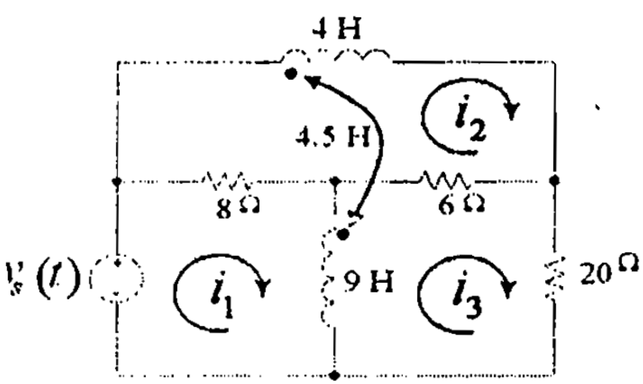
شرط اینکه یک ماتریس مثبت و معین باشد، آن است که دترمینان تمام زیر ماتریس های اصلی آن همگی مثبت باشند. در مورد سلف های با دو سیم پیچ، نامنفی بودن دترمینان L یعنی $L_{11}L_{22}\text{-}M^2 > 0$ که قبلاً نشان داده شده است.

❑ **توجه:** نمی توان هر ماتریس دلخواه متقارن را به عنوان یک ماتریس اندوکتانس در نظر گرفت. لازم است ابتدا تمام دترمینان های زیر ماتریس های 2*2 و 1*1 و 3*3 و ... را محاسبه کرد و اگر همگی آنها مثبت بودند، این ماتریس می تواند نشان دهنده یک ماتریس اندوکتانس سیم پیچی های تزویج شده باشد.

❑ بیان رابطه سلف های تزویج شده در حالت دائم سینوسی به صورت روبرو است:

$$\mathrm{I}_1 = \frac{\Gamma_{11}}{j\omega}\mathrm{V}_1 + \frac{\Gamma_{12}}{j\omega}\mathrm{V}_2$$
$$\mathrm{I}_1 = \frac{\Gamma_{21}}{j\omega}\mathrm{V}_1 + \frac{\Gamma_{22}}{j\omega}\mathrm{V}_2$$

❑ **مثال)** معادلات مش را در مدار شکل مقابل بنویسید.



■ **حل)**

KVL در مش ۱ $\quad 8(i_1\text{-}\ i_2) + 9\frac{d}{dt}(i_1\text{-}\ i_3) + 4.5\frac{di_2}{dt} = v_s(t)$

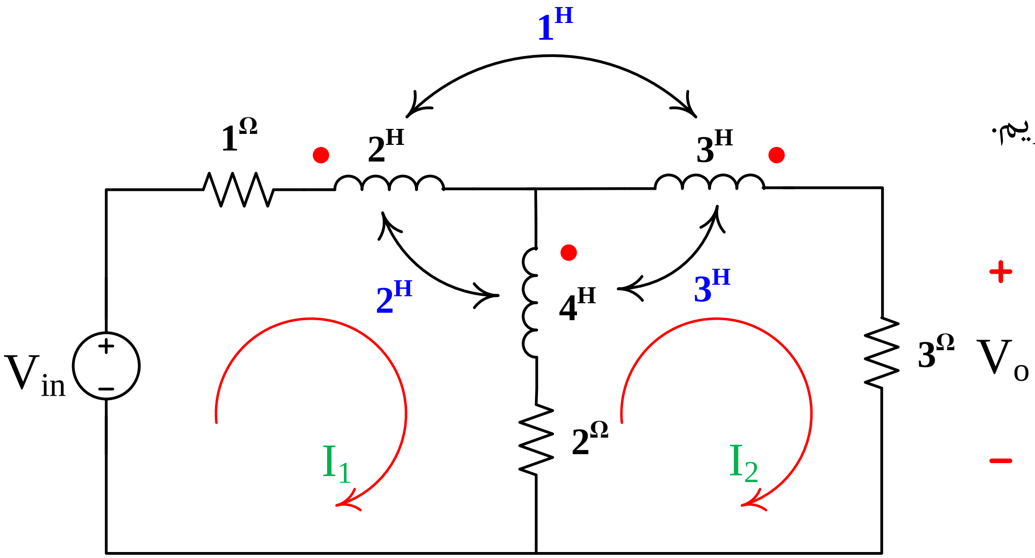
KVL در مش ۲ $\quad 4\frac{di_2}{dt} + 4.5\frac{d}{dt}(i_1\text{-}\ i_3) + 6(i_2\text{-}\ i_3) + 8(i_2\text{-}\ i_1) = 0$

KVL در مش ۳ $\quad 6(i_3\text{-}\ i_2) + 20i_3 + 9\frac{d}{dt}(i_3\text{-}\ i_1)\ \text{-}\ 4.5\frac{di_2}{dt} = 0$

****

❑ **مثال)** در مدار دایمی سینوسی مقابل، تابع شبکه $H(j\omega)=V_o/V_{in}$ را به دست آورید.

■ **حل)**



برای حل، تحلیل مش را در حالت فیزوری به کار می بریم.

$$H(j\omega)=\frac{V_o}{V_{in}}=\frac{3I_2}{V_{in}}$$

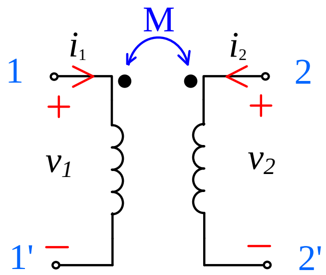
KVL در مش ۱: $I_1+(j\omega 2I_1-j\omega I_2+j\omega 2(I_1-I_2))+(j\omega 4(I_1-I_2)+j\omega 2I_1-j\omega 3I_2)+2(I_1-I_2)-V_{in}=0$

KVL در مش ۲: $(j\omega 3I_2-j\omega I_1+j\omega 3(I_2-I_1))+3I_2+2(I_2-I_1)+(j\omega 4(I_2-I_1)-j\omega 2I_1+j\omega 3I_2)=0$

با حذف I_1 خواهیم داشت:

$$H(j\omega)=\frac{3I_2}{V_{in}}=\frac{3(2+j\omega 10)}{11-30\omega^2+j\omega 49}$$

****

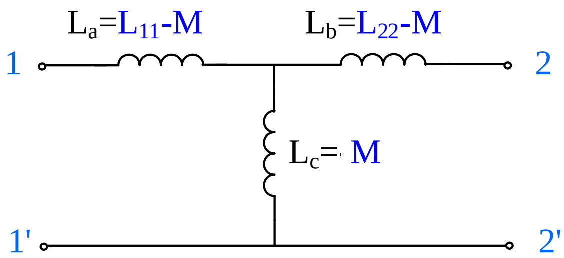


❖ **مدار معادل سلف های تزویج شده:** برای دو سلف LTI تزویج شده در گذشته به دست آمد:

$$v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$$

یا

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix}$$



➢ **مدار معادل T:** با نوشتن KVL در حلقه راست و چپ، روابط ولتاژ ترمینال ها مطابق معادلات فوق برقرار می شوند:

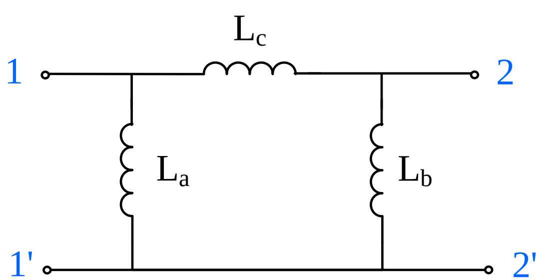
$$v_1 = L_a\frac{di_1}{dt} + L_c\frac{d}{dt}(i_1+i_2) = (L_a+L_c)\frac{di_1}{dt} + L_c\frac{di_2}{dt}$$
$$v_2 = L_b\frac{di_1}{dt} + L_c\frac{d}{dt}(i_1+i_2) = L_c\frac{di_2}{dt} + (L_b+L_c)\frac{di_2}{dt}$$

از مساوی قراردادن ضرایب مشتقات جریان با L_1 و M در معادله اول و با L_1 و M در معادله دوم داریم:

$$L_a + L_c = L_{11}$$
$$L_c = M$$
$$L_b + L_c = L_{22}$$

$$\Rightarrow \quad L_a = L_{11} - M, \quad L_b = L_{22} - M, \quad L_c = M$$

➢ **مدار معادل Π** (اثبات در انتهای فصل)

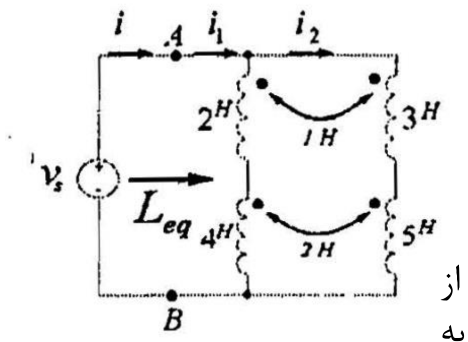


$$\begin{cases} L_a = \dfrac{L_{11}L_{22} - M^2}{L_{22} - M} \\[2ex] L_b = \dfrac{L_{11}L_{22} - M^2}{L_{11} - M} \end{cases} \qquad L_c = \frac{L_{11}L_{22} - M^2}{M}$$

✓ **توجه:** صورت عبارت‌های مذکور، هرسه بزرگتر از صفر هستند: $L_1L_2 - M^2 > 0$

لکن مخرج های آن ها در هر سه کسر می تواند منفی باشد. یعنی گرچه روابط ریاضی فوق برای پیدا کردن مدار معادل Π معتبر است، لیکن ممکن است بخاطر منفی درآمدن مقدار سلف ها، تحقق فیزیکی آن ها مقدور نباشد. بعداً خواهیم دید که با استفاده از ترانسفورمرهای ایده آل، می‌توان مدل معادل T یا Π را چنان پیدا کرد که مقادیر اندوکتانس سلف های آن همواره مثبت باشد.

❑ **مثال)** اندوکتانس معادل دیده شده در سرهای A و B مدار شکل زیر را تعیین کنید.



■ **حل)**

راه حل اول: منبع ولتاژ V_S را در سرهای A و B وصل می‌کنیم و سعی می‌کنیم با روش‌های تحلیل مداری، رابطه‌ای به صورت زیر به دست آوریم:

$$v = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

روش تحلیل مش را انتخاب می‌کنیم و جریان های مش‌ها را i_1 و i_2 فرض می‌کنیم. جریان های گذرنده از سلف های عمودی، به ترتیب $i_1 - i_2$ و i_2 می‌باشد. با نوشتن KVL در مش بیرونی و مش سمت چپ به دست می‌آوریم:

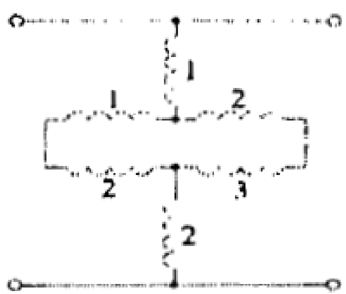
$$3\frac{di_2}{dt}+1\frac{d}{dt}(i_1-i_2)+5\frac{di_2}{dt}+2\frac{d}{dt}(i_1-i_2)=v_s$$

$$2\frac{d}{dt}(i_1-i_2)+1\frac{di_2}{dt}+4\frac{d}{dt}(i_1-i_2)+2\frac{di_2}{dt}=v_s$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3\frac{di_1}{dt}+5\frac{di_2}{dt}&=v_s \\ 6\frac{di_1}{dt}-3\frac{di_2}{dt}&=v_s \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{di_1}{dt}=\frac{8}{39}v_s \Rightarrow v_s=\frac{39}{8}\frac{di_1}{dt}$$

$$\longrightarrow L_{eq}=\frac{39}{8}H$$

توجه شود که i همان i_1 است.

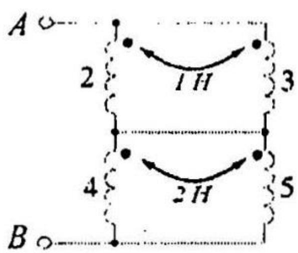


راه حل دوم: با استفاده از مدار معادل T و با توجه به نقطه اشتراک سلف ها، می‌توان شکل روبرو را رسم کرد:

$$L_{eq}=1+3||5+2=3+\frac{15}{8}=\frac{39}{8}\Rightarrow L_{eq}=\frac{39}{8}H$$

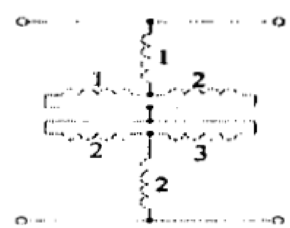
****

❑ **مثال)** اندوکتانس معادل در سرهای A و B مدار شکل مقابل را به دست آورید؟



■ **حل)**

با استفاده از مدار معادل T می‌توان شکل مقابل را رسم کرد:

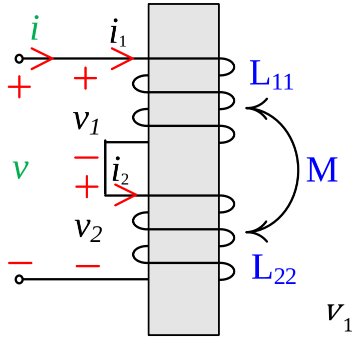


$$L_{eq}=1+(1||2)+(2||3)+2=1+\frac{2}{3}+\frac{6}{5}+2=\frac{73}{15}\Rightarrow L_{eq}=\frac{73}{15}\ H$$

****

❖ اتصال سری موازی سلفهای تزویج شده:

۱ــ اتصال سری سلفهای تزویج شده:



$$i = i_1 = i_2$$

$$v = v_1 + v_2$$

با فرض صفر بودن شارهای اولیه

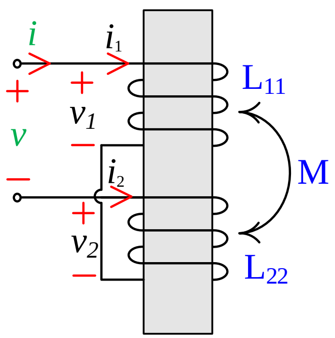
$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \varphi_1 &= L_{11} i_1 + M i_2 \\ \varphi_2 &= M i_1 + L_{22} i_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \varphi &= L_{11} i + 2Mi + L_{22} i \\ L_{eq} &= L_{11} + L_{22} + 2|M| \end{aligned}$$

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = (L_1 + M)\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow v = v_1 + v_2 = (L + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = (L_2 + M)\frac{di}{dt}$$

✓ اگر سرهای سیم پیچی به صورت مقابل باشد:



$$i = i_1 = -i_2$$

$$v = v_1 - v_2$$

با فرض صفر بودن شارهای اولیه

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_1 &= L_{11} i_1 + M i_2 \\ \varphi_2 &= M i_1 + L_{22} i_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \varphi &= L_{11} i - 2Mi + L_{22} i \\ L_{eq} &= L_{11} + L_{22} - 2|M| \end{aligned}$$

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = (L_1 - M)\frac{di}{dt}$$

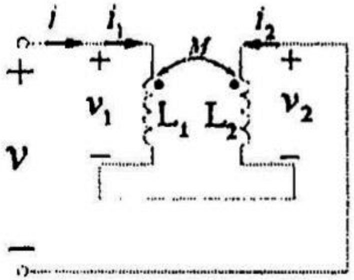
$$v = v_1 - v_2 = (L + L_2 - 2M)\frac{di}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = (M - L_2)\frac{di}{dt}$$

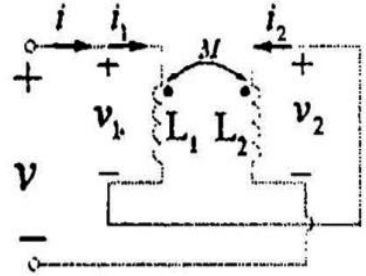
✓ **نتیجه مهم:** در حالت کلی برای اتصال سری سلف های مزدوج داریم:

$$L_{eq} = L_{11} + L_{22} \pm 2|M|$$

که در آن علامت مثبت وقتی به کار می‌رود که شارهای ایجاد شده در اثر جریان های مشترک در سلف‌ها، جهت‌های یکسان داشته باشند و علامت منفی وقتی برقرار است که این شارها جهت مخالف داشته باشند.



$L_a = L_1 + L_2 - 2M$



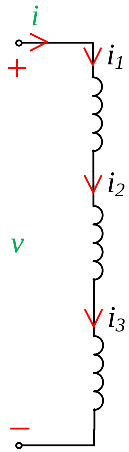
$L_b = L_1 + L_2 + 2M$

✓ **نتیجه مهم:** با کمک روش فوق می توان با اندازه گیری L_a و L_b مقدار ضریب تزویج M میان دو سیم پیچ را اندازه گیری کرد.

$$|M| = \frac{1}{4}|L_a - L_b|$$

❑ **مثال)** در شکل های مقابل، مقدار سلف معادل اتصال سری چقدر است؟

■ **حل)**

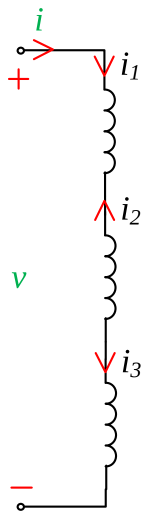


$$L = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$i = i_1 = i_2 = i_3$$
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$
$$\phi = LI$$

$$\varphi = (10 - 1 + 2)i + (-1 + 3 - 1)i + (2 - 1 + 5)i = 18i$$

$$L_{eq} = 18^{\,H}$$



$$L = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

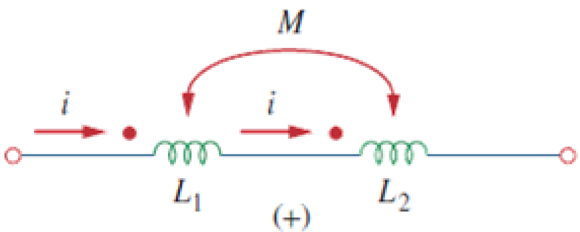
$$i = i_1 = -i_2 = i_3$$
$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3$$
$$\phi = LI$$

$$\varphi_1 = (10 - (-1) + 2)i = 13i$$
$$\varphi_2 = (-1 - (3) - 1)i = -5i$$
$$\varphi_3 = (2 - (-1) = 5)i = 8i$$

$$\varphi = (13 - (-5) + 8)i = 26i$$

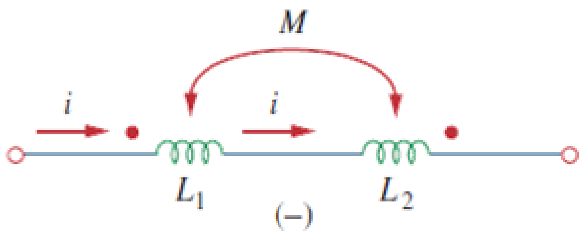
$$L_{eq} = 26^{\,H}$$

****

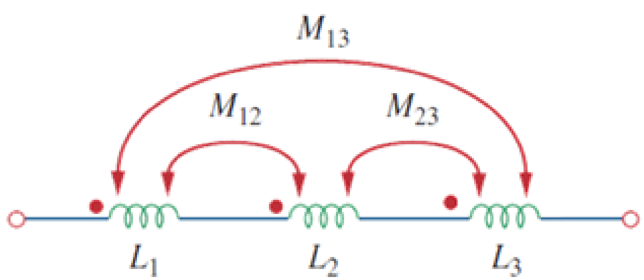


$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M$$

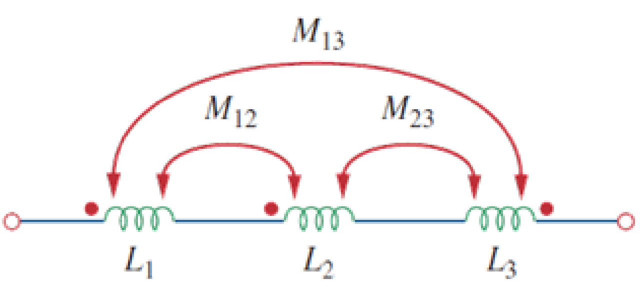


$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

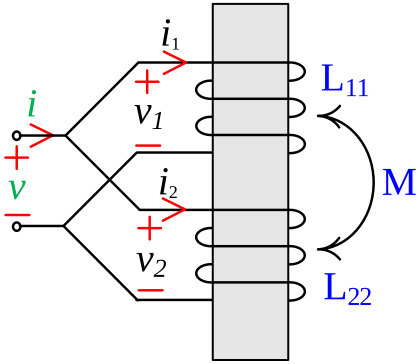


$$L = L_1 + L_2 + L_3 + 2M_{12} + 2M_{13} + 2M_{23}$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \pm 2M_{12} \pm 2M_{13} \pm 2M_{23}$$



$$L = L_1 + L_2 + L_3 + 2M_{12} - 2M_{13} - 2M_{23}$$



۲ـ اتصال موازی سلفهای تزویج شده: در اتصال موازی راحت تر است که از ماتریس القاء معکوس استفاده شود. اگر M مثبت باشد، Γ_{12} منفی و اگر M منفی باشد، Γ_{12} مثبت است.

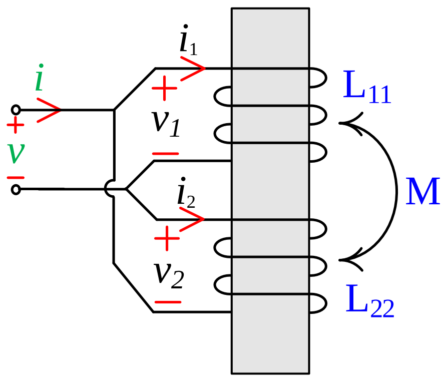
$$i = i_1 + i_2$$

$$v = v_1 = v_2$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} i_1 = \Gamma_{11}\varphi_1 + \Gamma_{12}\varphi_2 \\ i_2 = \Gamma_{21}\varphi_1 + \Gamma_{22}\varphi_2 \end{array}$$

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi$$

$$\phi = LI \longrightarrow I = \Gamma\phi \longrightarrow \begin{cases} i = (\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12})\varphi \\ L_{eq} = \dfrac{1}{(\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12})} \end{cases}$$



$$i = i_1 - i_2$$

$$v = v_1 = -v_2$$

$$\begin{array}{l} i_1 = \Gamma_{11}\varphi_1 + \Gamma_{12}\varphi_2 \\ i_2 = \Gamma_{21}\varphi_1 + \Gamma_{22}\varphi_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} i_1 = \Gamma_{11}\varphi - \Gamma_{12}\varphi \\ i_2 = \Gamma_{21}\varphi - \Gamma_{22}\varphi \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} i = (\Gamma_{11} + \Gamma_{22} - 2\Gamma_{12})\varphi \\ L_{eq} = \dfrac{1}{(\Gamma_{11} + \Gamma_{22} - 2\Gamma_{12})} \end{cases}$$

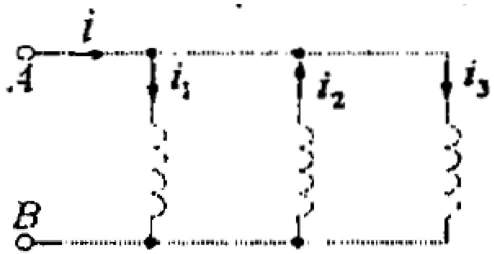
✓ **نتیجه مهم:** برای اتصال موازی دو سلف تزویج شده ضریب القاء (اندوکتانس) معکوس از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Gamma_{eq} = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} \pm 2|\Gamma_{12}|$$

که در آن علامت مثبت وقتی حاصل می‌شود که شارهای بوجود آمده از هر جریان، جهت‌های مخالف داشته باشند و علامت منفی وقتی برقرار است که این شارها جهت‌های یکسان داشته باشند.

✓ **توجه:** با در نظر گرفتن رابطه روبرو دیده می‌شود که برای حالتی که شارهای بـه وجـود آمـده هـم جهـت باشند، M مثبت و بنابراین اندوکتانس معکوس منفی خواهد بود.

$$\Gamma_{12} = \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2}$$



❑ **مثال)** ماتریس اندوکتانس سه سلف تزویج شده که به صورت زیر به هم وصل شده‌اند، چنین داده شده است. اندوکتانس دیده شده در سرهای A و B را تعیین کنید؟

$$L=\begin{pmatrix}10 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

■ **حل)**

چون سلف ها به صورت موازی وصل شده‌اند، از ماتریس اندوکتانس معکوس استفاده می‌کنیم.

$$\Gamma=L^{-1}=\frac{1}{119}\begin{bmatrix}14 & 7 & -7\\ 7 & 46 & -12\\ -7 & -12 & 29\end{bmatrix}$$

چون سلف‌ها با هم موازی هستند، پس روابط زیر را بین شارها داشته و می توان مقادیر متناظر آن ها را جایگذاری کرد:

$$\left.\begin{aligned}&v=v_1=-v_2=v_3 \;\Rightarrow\; \varphi=\varphi_1=-\varphi_2=\varphi_3\\ &\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{bmatrix}=[\Gamma]\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&i_1=\frac{1}{119}(14-7-7)\varphi=0\\ &i_2=\frac{1}{119}(7-46-12)\varphi=\frac{-51}{119}\varphi\\ &i_3=\frac{1}{119}(-7+12+29)\varphi=\frac{34}{119}\varphi\end{aligned}$$

با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه مربوط به کل جریان ها می توان نوشت:

$$i=i_1-i_2+i_3 \Rightarrow i=\frac{51}{119}\varphi+\frac{34}{119}\varphi=\frac{85}{119}\varphi \Rightarrow \varphi=\frac{119}{85}i=L_{eq}i \;\Rightarrow\; L_{eq}=\frac{119}{85}\,H$$

****

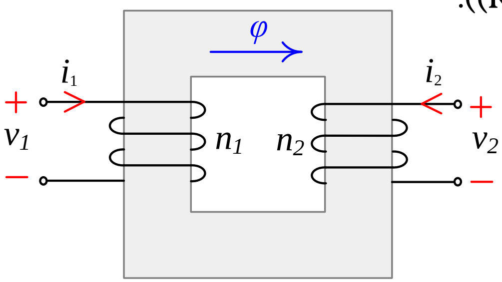
۵–۲– ترانسفورمر ایده آل

❖ **مفهوم ترانسفورمر ایده آل:** ترانسفورمر ایده آل، المان با تزویج مغناطیسی بین دو با تعداد بیشتری سیم پیچی است که:

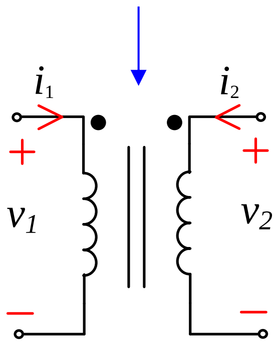
✓ در آن هیچ گونه اتلاف انرژی وجود ندارد.

✓ هیچ گونه شار نشتی در آن وجود ندارد (ضریب نفوذ مغناطیسی هسته ∞ و تزویج کامل است ($k=1$)).

✓ ضریب خود القایی هر سیم پیچ بینهایت است.



فرض اینکه هیچگونه شار مغناطیسی نشتی وجود ندارد، به معنی این است که تمام میدان مغناطیسی در هسته محبوس می‌شود. و این به معنی بینهایت بودن ضریب نفوذپذیری مغناطیسی μ است. در این حالت، هر خط القاء مغناطیسی که از یک حلقه سیم پیچ اول بگذرد از تک تک حلقه‌های سیم پیچ های دیگر نیز خواهد گذشت.



n_1:n_2

نماد ترانسفورمر ایده آل

❑ ترانس ایده آل با دو سیم پیچی و تعداد حلقه های n_1 و n_2 را در نظر بگیرید. اگر φ شار عبوری از یک سیم پیچی با یک حلقه، و φ_1 و φ_2 نیز کل شارهای عبوری از سیم پیچ های اول و دوم باشد، داریم:

$$\left.\begin{aligned}\phi_1 &= n_1\varphi\\ \phi_2 &= n_2\varphi\\ v &= \frac{d\phi}{dt}\end{aligned}\right\}\quad \frac{v_1}{v_2}=\frac{d\phi_1/dt}{d\phi_2/dt}=\frac{n_1 d\varphi/dt}{n_2 d\varphi/dt}\longrightarrow \boxed{\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_1}{n_2}}\quad 1$$

قانون فاراده: $v=\dfrac{d\phi}{dt}$

قانون آمپر: $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = mmf = n_1 i_1 + n_2 i_2 \xrightarrow{\vec{H}=\vec{B}/\mu} n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$

مشابه قانون اهم در الکتریسیته، در مغناطیس هم داریم. $mmf = \mathcal{R}\phi$

برای هسته ایده آل $\mathcal{R}=\dfrac{1}{\mu}=0$

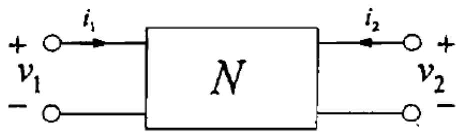
$$\boxed{\frac{i_1}{i_2}=-\frac{n_2}{n_1}}\quad 2$$

➢ روابط ۱ و ۲ به عنوان معادلات توصیفگر ترانسفورمر ایده آل بوده و در مدل مداری ترانسفورمر ایده آل، ۲ خط موازی، بیانگر هسته می باشد.

❖ چند نکته قابل توجه در مورد ترانسفورمر ایده آل:

۱ ـ ترانسفورمر ایده آل، به صورت یک مدار دو قطبی تعریف می‌شود که میان ولتاژهای دو سر و جریان های دو سر آن روابط زیر برقرار است:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1} \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$



۲- چون معادلات بالا توصیف کننده ترانسفورمر ایده آل، روابط خطی بوده و ضرایب n_1 و n_2 به زمان بستگی ندارند، پس **ترانسفورمر ایده آل، یک المان LTI است.**

۲ ـ با توجه به معادلات توصیف کننده ترانسفورمر ایده آل، به راحتی به دست می‌آوریم: $v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0 \quad \forall t$

یعنی در تمامی لحظات در ترانسفورمر ایده آل، هیچ انرژی ذخیره یا تلف نمی‌شود و تمام انرژی ورودی به یک سر، از سر دیگر خارج می شود. به عبارتی، **ترانسفورمر ایده آل، یک عنصر بی اتلاف و بدون ذخیره انرژی و بدون حافظه است.**

۳- ولتاژ v_1 به i_1 و i_2 ارتباطی ندارد و تنها به v_2 بستگی دارد. به طریق مشابه، جریان i_1 به v_1 و v_2 بستگی ندارد و فقط به i_2 بستگی دارد. اگر سرهای سیم پیچ دوم ترانسفورمر باز باشد یعنی $i_2 = 0$ باشد هر قدر v_1 زیاد شود اثری روی i_1 نخواهد داشت و $i_1 = 0$ خواهد بود. **پس خود القایی هر سیم پیچ ترانسفورمر ایده آل بینهایت است** (در ترانسفورمر واقعی این گونه نیست).

۴- علاوه بر دارا بودن ضریب خود القائی بینهایت (Lهای بینهایت)، ترانسفورمر ایده آل به صورت یک جفت سلف تزویج شده با ضریب تزویج ۱ است (M بینهایت). همچنین مقاومت سیم پیچ ها نیز صفر است.

رابطه انرژی برای دو سلف تزویج دار — تزویج کامل (k=1)

$$\varepsilon(i_1,i_2) = \frac{1}{2}L_{11}{i_1}^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_{22}{i_2}^2 = 0 \quad , \quad M = \sqrt{L_{11}L_{22}} \ \rightarrow \varepsilon(i_1,i_2) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{L_{11}}\,i_1 + \sqrt{L_{22}}\,i_2\right)^2 = 0$$

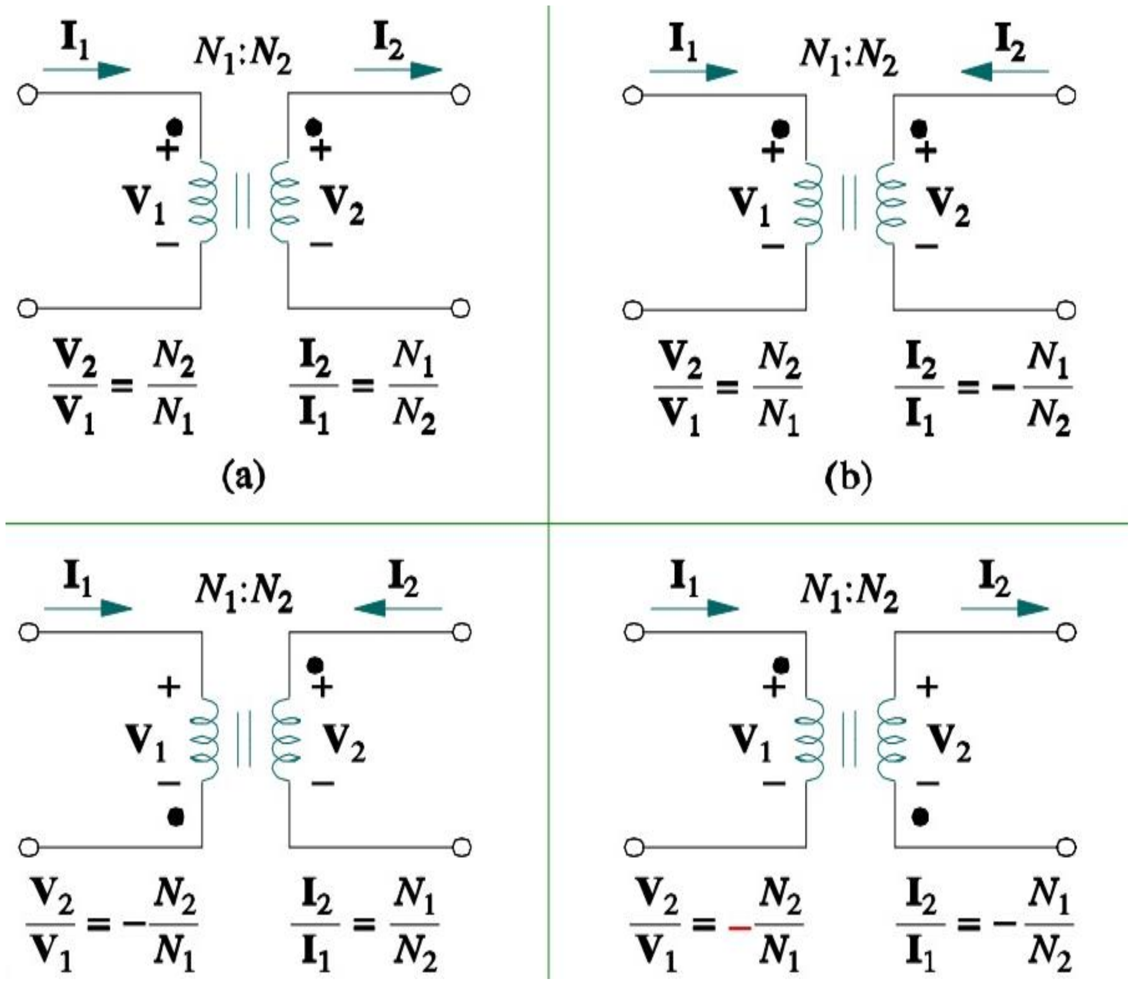
$$=> \quad \frac{i_1}{i_2} = -\frac{\sqrt{L_{22}}}{\sqrt{L_{11}}} \rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{L_{11}}}{\sqrt{L_{22}}}$$

➢ از این رابطه، برای تعریف نسبت تبدیل ترانسفورمر در نرم افزار اسپایس استفاده می شود.

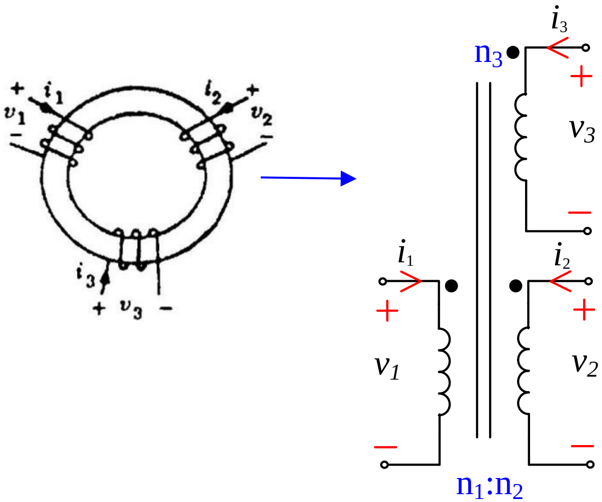
۵ ـ اگر محل سرهای نقطه دار مطابق شکل مقابل تعویض گردد، معادلات توصیف کننده ترانسفورمر ایده آل به صورت زیر خواهد بود. در واقع، **علامت های + و − در معادلات توصیف کننده به محل قراردادی نقطه ها بستگی دارند.** در واقه مهم است که قطبیت ولتاژ و جهت جریان ها در ترانسفورمر در نظر گرفت هشود.

- ✓ اگر V_1 و V_2 هر دو مثبت یا منفی باشند در سرهای نقطه دار، نسبت n برای ولتاژ ها مصبت بوده و در غیر این صورت منفی است.
- ✓ اگر جریان ها هر دو از سرهای نقطه دار خارج شده و یا به آن ها داخل شوند، نسبت جریان ها منفی و در غیر این صورت مثبت است.

به صورت خلاصه می توان حالت های زیر را برای نسبت ولتاژها و جریان های ترانسفورمر ایده آل در نظر گرفت:



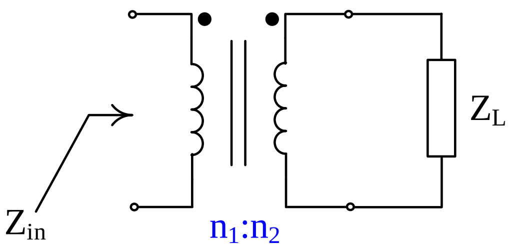
❖ **ترانسفورمر ایده آل با چند سیم پیچی:** سه سیم پیچ با تعداد دورهای n_1 و n_2 و n_3 و جریان ها و ولتاژهای (v_1 و i_1) و (v_2 و i_2) و (v_3 و i_3) را در نظر بگیرید. با تعمیم معادلات ترانسفورماتور با دو سیم پیچی، معادلات توصیف کننده این ترانسفورماتور عبارتند از:



$$n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 = 0$$

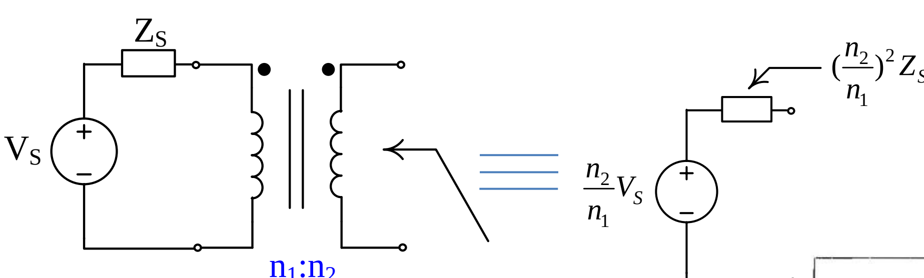
$$\frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2} = \frac{v_3}{n_3}$$

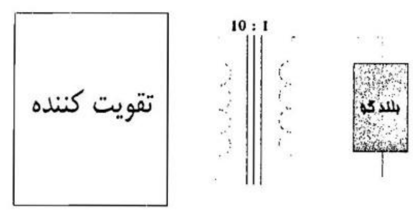
❖ **خاصیت تغییرامپدانس در ترانسفورمر:** اگر بار با امپدانس Z_L را به سیم پیچ ثانویه ترانسفورماتور ایده آل وصل کنیم، امپدانس دیده شده از سر اولیه تغییر کرده و به صورت دیده می‌شود. می‌توان از این خاصیت در تطبیق امپدانس مدارهای با امپدانس‌های متفاوت بهره جست.



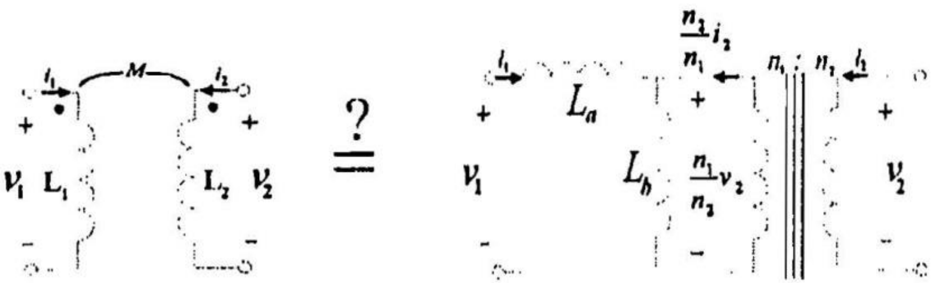
$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\frac{n_1}{n_2} V_2}{-\frac{n_2}{n_1} I_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{V_2}{-I_2} \quad , \quad Z_L = \frac{V_2}{-I_2} \Rightarrow \boxed{Z_{in} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \times Z_L}$$

- فرض کنید یک بلندگوی ۸ اهمی داریم که می‌خواهیم آن را به یک تقویت کننده که امپدانس خروجی آن ۸۰۰ اهم است وصل کنیم. برای تطبیق امپدانس لازم است به تقویت کننده بار ۸۰۰ اهمی وصل شود. بنابراین می‌توان از یک ترانسفورماتور ایده آل استفاده کرد و آن را میان بلندگو و تقویت کننده قرار داد و مطمئن شد که بیشترین توان به بلندگو انتقال داده می‌شود.





❖ **استفاده از ترانسفورمر برای جایگزینی تزویج در سلفهای تزویج شده:** مقادیر سلف های L_a و L_b و n_1/n_2 چقدر باشد که مدارهای مقابل با هم معادل باشند؟

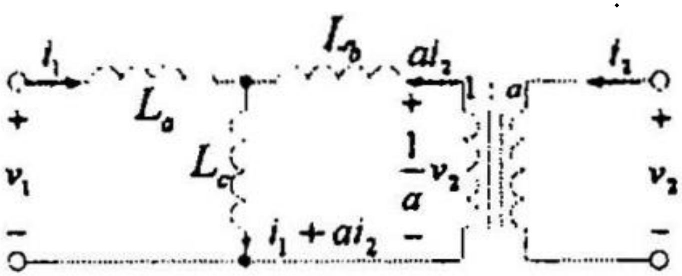


$$L_1 = L_a + b_a$$

$$L_2 = (\frac{n_2}{n_1})^2 L_b$$

$$M = (\frac{n_2}{n_1}) L_b$$

❖ **استفاده از ترانسفورماتور در مدارهای معادل سلفهای تزویج شده (مدل های T و Π):** مقادیر سلف های L_a و L_b و L_c و a چقدر باشد که مدارهای مقابل رفتاری مانند سلف های تزویج شده داشته باشد؟



$$v_1 = L_a \frac{di_1}{dt} + L_c \frac{d}{dt}(i_1 + ai_2) = (L_a + L_c)\frac{di_1}{dt} + aL_c \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{1}{a} v_2 = L_b \frac{d}{dt}(ai_2) + L_c \frac{d}{dt}(i_1 + ai_2) \Rightarrow$$

$$v_2 = aL_c \frac{di_1}{dt} + (L_b + L_c)a^2 \frac{di_2}{dt}$$

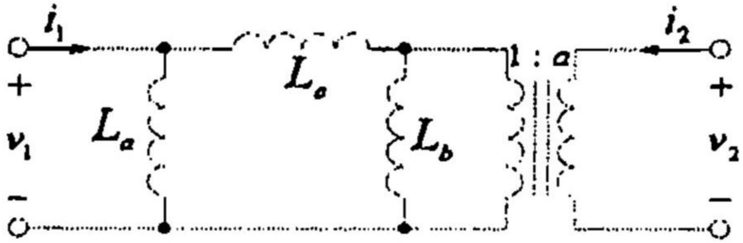
با انتخاب روابط روبرو خواهیم داشت:

$$M = aL_c \quad , \quad L_2 = (L_b + L_c)a^2 \quad , \quad L_1 = L_a + L_c$$

$$\Rightarrow \quad L_c = \frac{1}{a} M \quad , \quad L_a = L_1 - \frac{1}{a} M \quad , \quad L_b = \frac{1}{a^2} L_2 - \frac{1}{a} M$$

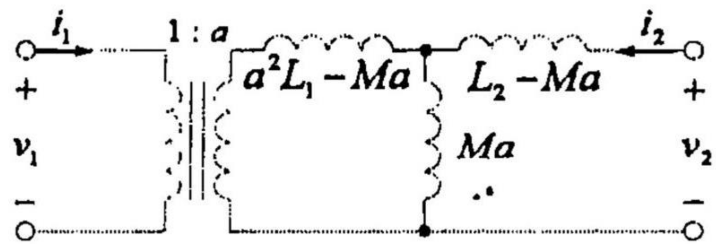
ملاحظه می شود که روابط فوق برای هر مقدار L_1 و L_2 و M و a بر قرار است. می توان با انتخاب مقدار مناسبی برای a عبارت های $L_a = L_1 - \frac{1}{a} M$ و $L_a = \frac{1}{a^2}(L_2 - aM)$ را همواره مثبت اختیار نمود.

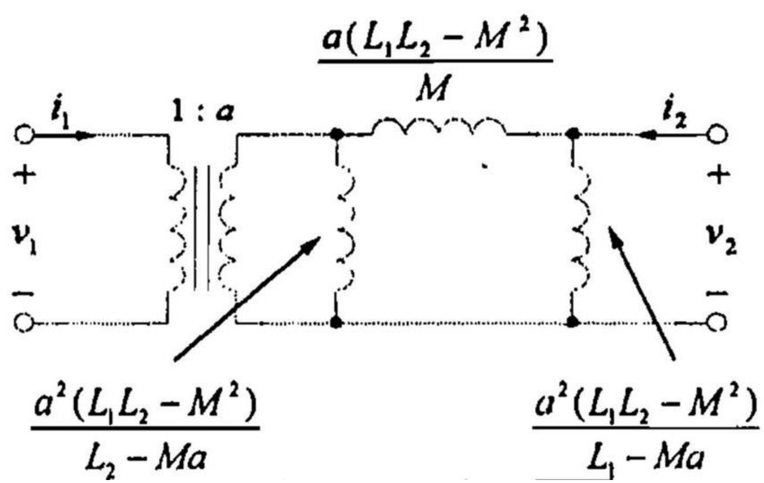
به طریق مشابه برای مدار معادل π می توان برابری زیر را نشان داد:



$$L_c = \frac{L_1L_2 - M^2}{Ma} \ , L_b = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - Ma} \ , L_a = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - Ma}$$

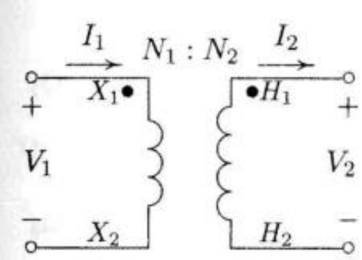
❖ **توجه:** می توان ترانسفورماتور ایده آل را در سرهای سیم پیچی اول نیز قرار داد و به دست آورد:

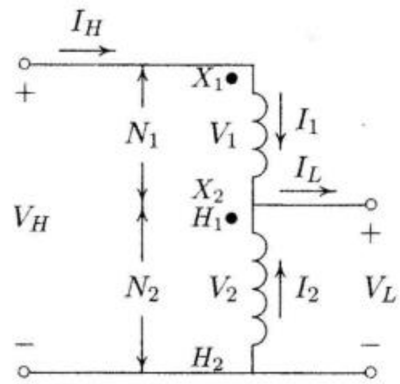




۵–۳– اتوترانسفورمر

ساختار اتوترانسفورمر به گونه ای است که یک سیم پیچ با یک یا چند اتصال لغزان دارد. یک سیم پیچ را سیم پیچ سری، و سیم پیچ دیگر را سیم پیچ مشترک نامند.

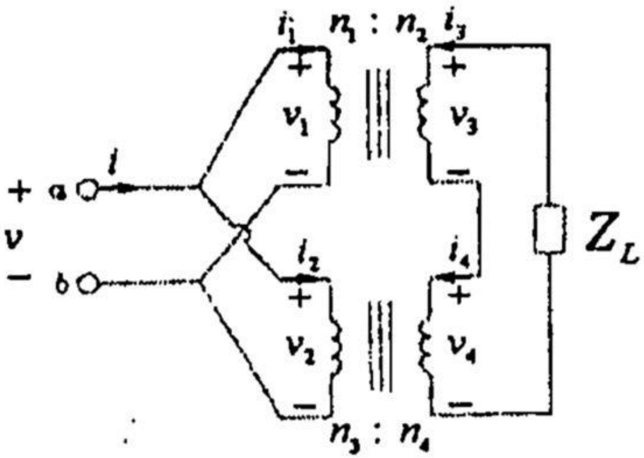




$$\left.\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{N_1}{N_2} = a \\ \frac{I_2}{I_1} &= \frac{N_1}{N_2} = a \\ V_H = V_2 + V_1 &\Rightarrow V_H = V_2 + \frac{N_1}{N_2} V_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} V_H &= V_L + \frac{N_1}{N_2} V_L = (1+a)V_L \\ \frac{V_H}{V_L} &= 1 + a = \frac{N_1+N_2}{N_2} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} N_2 I_2 &= N_1 I_1 \\ N_2(I_L - I_1) &= N_1 I_1 \\ I_L &= \frac{N_1 + N_2}{N_2} I_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{I_L}{I_H} = \frac{N_1 + N_2}{N_2}$$

power rating advantage: $\frac{S_{auto}}{S_{2-\omega}} = \frac{(V_1 + V_2)I_1}{V_1 I_1} = 1 + \frac{N_2}{N_1} = 1 + \frac{1}{a}$



❑ **مثال)** امپدانس ورودی مدار شکل مقابل را در سر های a و b حساب کنید.

■ **حل)**

با توجه به نحوه بهم پیوستن المان ها، روابط زیر برقرار است:

$$i = i_1 + i_2 \qquad \frac{v_1}{v_3} = \frac{n_1}{n_2} \qquad \frac{i_1}{i_3} = -\frac{n_2}{n_1}$$

$$v = v_1 = v_2$$

$$i_3 = i_4 \qquad \frac{v_2}{v_4} = \frac{n_3}{n_4} \qquad \frac{i_2}{i_4} = -\frac{n_4}{n_3}$$

KVL در حلقه سمت راست $\quad Z_L I_3 + V_3 + V_4 = 0 \Rightarrow Z_L\left(-\frac{n_1}{n_2}\right)I_1 + \frac{n_2}{n_1}V_1 + \frac{n_4}{n_3}V_2 = 0 \quad$ 1

از سوی دیگر:

$$I = I_1 + I_2 = I_1 + \left(-\frac{n_4}{n_3}\right)I_4 = I_1 + \left(-\frac{n_4}{n_3}\right)\left(\frac{-n_1}{n_2}\right)I_1 \rightarrow I = \left[1 + \frac{n_1 n_4}{n_2 n_3}\right]I_1 \qquad 2$$

با توجه به این که $V = V_1 = V_2$ با جایگزینی (۲) در (۱) به دست می آوریم:

$$Z_L\left(-\frac{n_1}{n_2}\right)\frac{I}{I + \frac{n_1 n_4}{n_2 n_3}} + \frac{n_2}{n_1}V + \frac{n_4}{n_3}V = 0$$

$$\rightarrow Z_{in} = \frac{V}{I} = \frac{\dfrac{\frac{n_1}{n_2}}{1 + \frac{n_1 n_4}{n_2 n_3}}}{\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_4}{n_3}} Z_L = \frac{(n_1 n_3)^2}{(n_2 n_3 + n_1 n_4)^2} Z_L$$

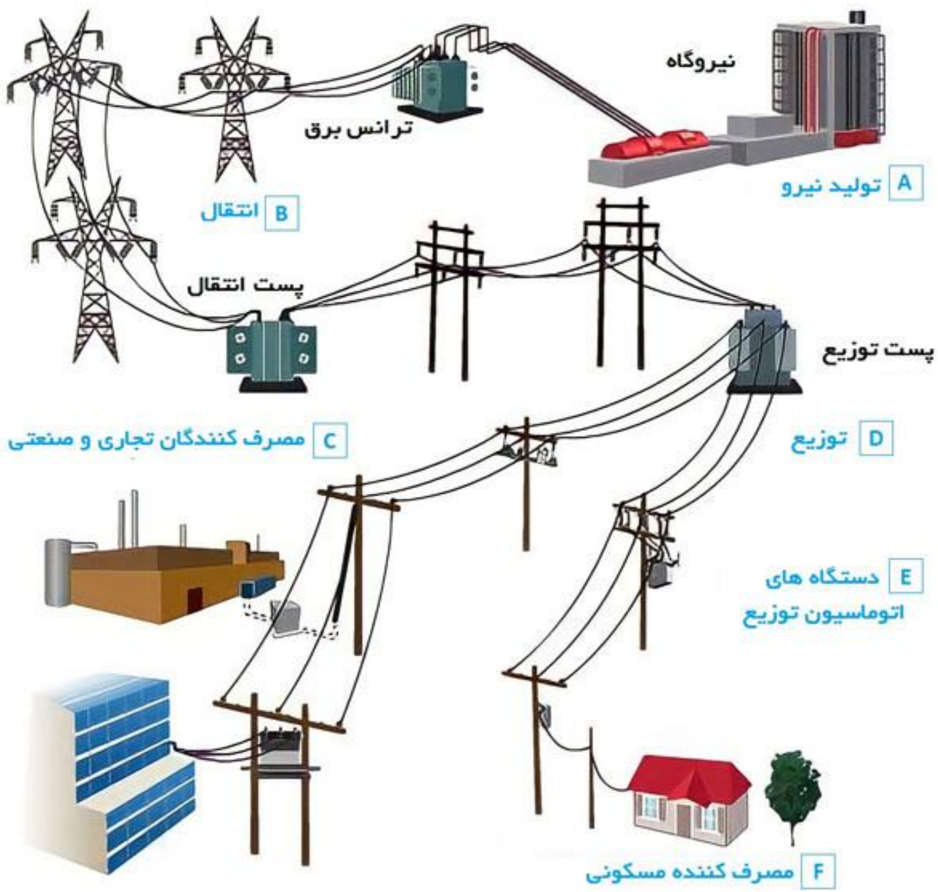
۵–۴– مدارهای سه فاز

- تولید، انتقال و توزیع ظرفیت های بالای انرژی الکتریکی، به صورت AC سه فاز می‌باشد. ضمناً انتقال ولتاژ به صورت متناوب است زیرا امکان استفاده از ترانسفورماتور برای تغییر سطح ولتاژ مهیا می‌شود. سیستم انتقال ولتاژ بالا، به این دلیل استفاده می شود که تلفات انرژی کم تر شود.

❖ دلایل برتری سیستم های سه فاز بر سیستم های تک فاز عبارتند از:

۱ – در یک سیستم تک فاز، توان لحظه ای تحویل داده شده به یک بار ثابت نبوده و نوسان می کند. در حالی که در یک سیستم سه فاز، توان لحظه ای ثابت و مستقل از زمان بوده و این نوسانات به مقدار قابل ملاحظه ای کاهش می یابد.

۲ – تولید انرژی الکتریکی به صورت سه فاز، به مراتب راحت تر از تولید آن به صورت تک فاز است.



❖ مشخصه های خطوط انتقال انرژی بین شهرها:

۱ – ولتاژ بالا؛

۲ – سه فاز؛

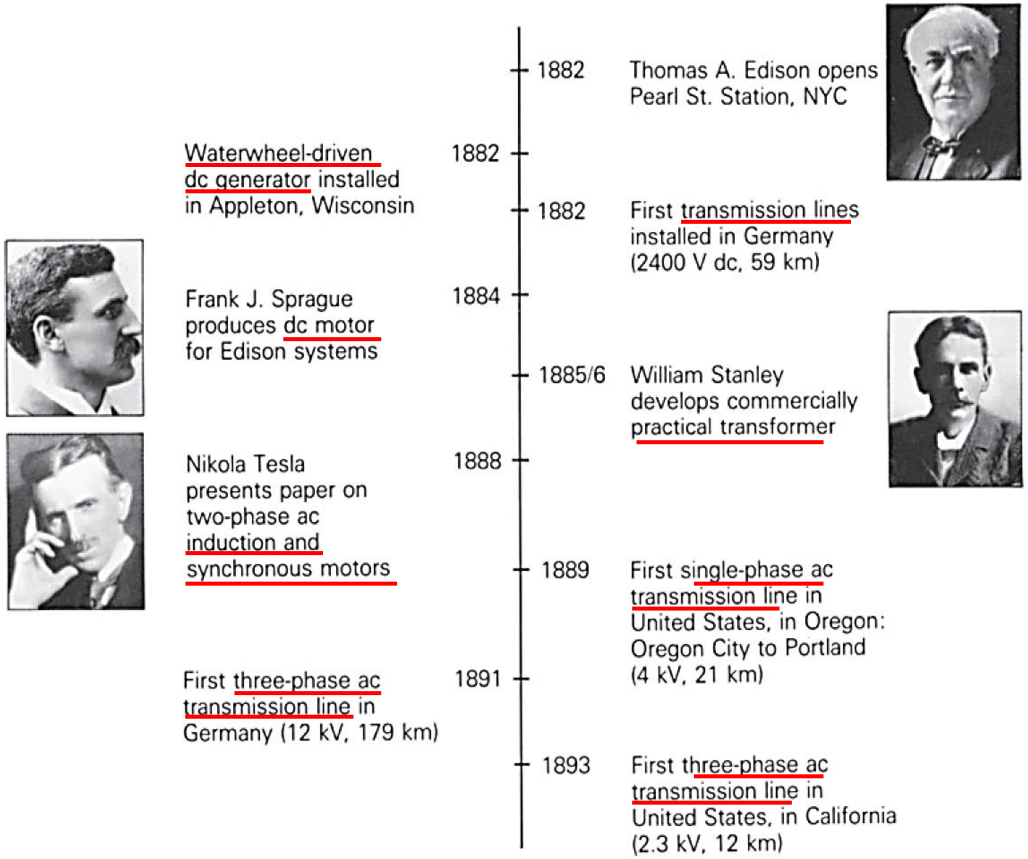
۳ – تغذیه شده به وسیله مولدهای ac (در مقابل مولدهای dc)؛

۴ – امکان افزایش/کاهش ولتاژ به کمک ترانسفورمرها؛

۵ – ولتاژ تولیدی در نیروگاه ها، در حدود ۱۰ تا ۳۰ کیلوولت است؛

۶ – برای کاهش اتلاف خطوط انتقال در مسافت های طولانی، این ولتاژ توسط ترانسفورمرها به چندصد کیلوولت افزایش داده می شود؛

۷ – در مراکز مصرف مانند کارخانجات، ادارات و منازل؛ مجدداً ولتاژ پایین آورده می شود؛



Milestones of the early electric utility industry

- **سؤال)** دلایل اقتصادی و مهندسی استفاده از مدارهای سه فاز چه می باشند؟

۱ – تحت بار متعادل، گشتاور روی موتور ثابت است و بنابراین ارتعاش ندارد (دلیل مهندسی).

۲ – ایجاد میدان مغناطیسی دوار با سه فاز، راحت تر است. امکان ساختن موتورهای القایی ارزان فراهم می شود (دلیل اقتصادی)؛

۳ – با سیستم سه فاز ac می توان در مقدار آلومینیم خطوط انتقال صرفه جویی کرد (دلیل اقتصادی)؛

۴ – تحت بارهای متعادل، به جای شش سیم، فقط سه سیم مورد نیاز است.

- اگر امپدانس خط انتقال به صورت Z = R + jX باشد، توان متوسط تلف شده در خط و توان رسیده به بار برابر است با:

$$P_L = \frac{1}{2} R I_m^2$$

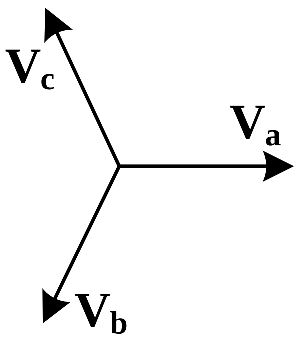
$$P_{in} = \frac{1}{2} V_m I_m Cos\,(\angle V - \angle I)$$

$$\Rightarrow \quad P_L = \frac{2 R {P_{in}}^2}{V_m^2 Cos^2(\angle V - \angle I)}$$

برای یک خط انتقال معین با R معلوم و برای انتقال توان داده شده با P معین می توان با انتخاب مقدار بزرگی برای V_m (معمولاً تا حدود ۷۶۵ کیلو ولت) و نزدیک نگهداشتن ضریب توان $cos(\angle V - \angle I)$ به عدد ۱، اتلاف توان را کاهش داد.

❑ **مفهوم ولتاژ سه فاز متعادل:** دسته‌ای از ولتاژهای سه فاز مشتمل بر سه ولتاژ سینوسی است که **دارای دامنه و فرکانس یکسان می‌باشند، اما اختلاف فاز ۱۲۰ درجه با یکدیگر دارند.** با فرض اینکه فاز a مبنا باشد، داریم:

$$\begin{cases} v_a = v_m \cos(\omega t) \quad or \quad v_m \angle 0 \\ v_b = v_m \cos(\omega t - 120^\circ) \quad or \quad v_m \angle -120^\circ \\ v_c = v_m \cos(\omega t + 120^\circ) \quad or \quad v_m \angle +120^\circ \end{cases}$$



$$v_a + v_b + v_c = 0 \quad \forall t$$

$$V_a + V_b + V_c = 0$$

به صورت فیزوری می توان چنین نوشت:

$$\boldsymbol{V_a = V_m \angle 0}$$

$$\boldsymbol{V_b = V_m \angle -120}$$

$$\boldsymbol{V_c = V_m \angle 120}$$

این رابطه فازی را دنباله (توالی یا Sequence) فازی abc یا دنباله فازی مثبت گویند (حرکت در جهت عقربه های ساعت).

می توان ولتاژهای سه فاز را به صورت زیر نیز در نظر گرفت:

$$\boldsymbol{V_a = V_m \angle 0}$$

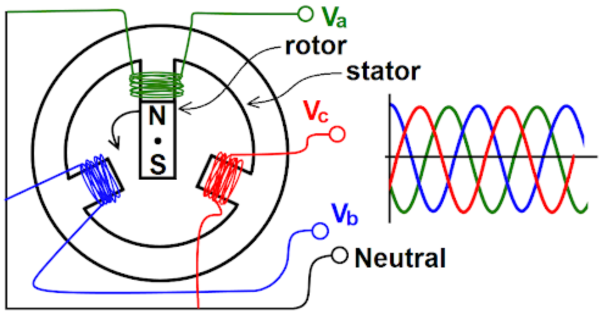
$$\boldsymbol{V_b = V_m \angle +120}$$

$$\boldsymbol{V_c = V_m \angle -120}$$

این رابطه دنباله فازی acb یا دنباله فازی منفی گویند. (خلاف جهت عقربه های ساعت)

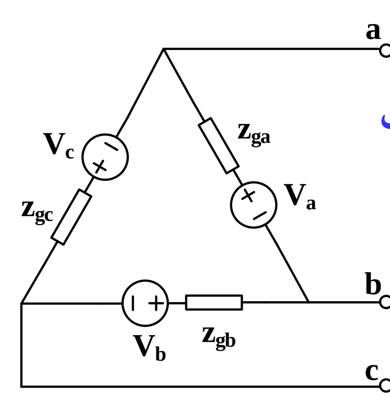
✓ **نکته مهم در تحلیل مدارهای سه فاز متقارن (متعادل):** اگر دنباله فازی و یکی از ولتاژ های دسته را بدانیم، تمام ولتاژ های دسته را می دانیم و در یک سیستم متعادل می توان بر روی محاسبه ولتاژ یا جریان یک فاز تمرکز نمود.

❖ **منابع ولتاژ سه فاز متعادل:** سه مولد که سیم پیچی جداگانه توزیع شده بر روی اطراف استاتور دارند، سیم پیچی های فازهای مولد را تشکیل می دهد. روتور مولد، یک آهنربای الکتریکی است که توسط یک گرداننده اصلی مانند توربین بخار یا توربین گازی چرخانده می شود.

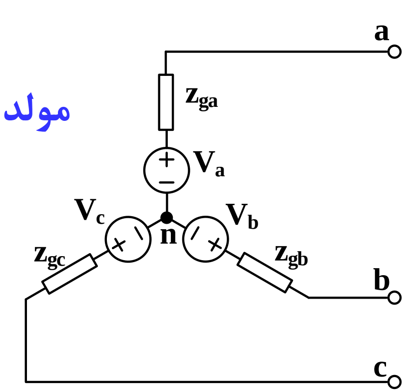


مولد سه فاز

- ✓ آهنربای الکتریکی، ضمن دوران، از مقابل سر سیم پیچ می گذرد و یک ولتاژ سینوسی در هر سیم پیچ القا می شود.
- ✓ سیم پیچ های فاز چنان طراحی شده اند که ولتاژ سینوسی القا شده در آنها از لحاظ اندازه یکسان بوده و اختلاف فازی دقیقاً به مقدار ۱۲۰ درجه با هم داشته باشند.
- ✓ چون سیم پیچ های فاز، در مقابل آهنربای الکتریکی، ساکن هستند، فرکانس ولتاژ القا شده در هر سیم پیچ یکسان است.
- ✓ هر سیم پیچ فاز را می توان به صورت یک منبع ولتاژ سینوسی ایده آل مدل سازی کرد. امپدانس هر سیم پیچ فاز در یک مولد سه فاز در مقایسه با سایر امپدانس های موجود در مدار، معمولاً بسیار کوچک است.
- ✓ اگر امپدانس هر سیم پیچی فاز قابل صرف نظر نباشد، منبع سه فاز با اضافه کردن امپدانس سیم پیچ به طور سری با منبع ولتاژ سینوسی مدل سازی می شود.
- ✓ چون تمام سیم پیچ های ژنراتور ساختاری یکسانی دارند، فرض می شود که امپدانس سیم پیچ ها یکسان است. امپدانس سیم پیچ مولدهای سه فاز، القایی است.
- ✓ سه منبع سینوسی ایده آل را می توان به دو طریق برای تشکیل منبع سه فاز بهم وصل کرد: اتصال ستاره یا $\mathbf{Y}$ و اتصال مثلث یا Δ.
- ✓ گره مشترک در اتصال منابع به صورت $\mathbf{Y}$ با حرف n علامت گذاری شده و به عنوان سر خنثی منبع گفته می شود.



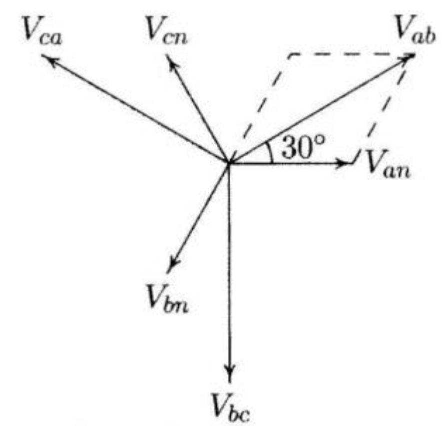
مولد سه فاز با اتصال مثلث



مولد سه فاز با اتصال ستاره

❖ **بار سه فاز متعادل:** بار وصل شده به منابع نیز سه فاز بوده و می تواند به صورت Y یا Δ باشد.

❑ Y connected load relations:



$$\boldsymbol{V_{an} = |V_p|\angle 0^\circ}$$

$$\boldsymbol{V_{bn} = |V_p|\angle -120^\circ}$$

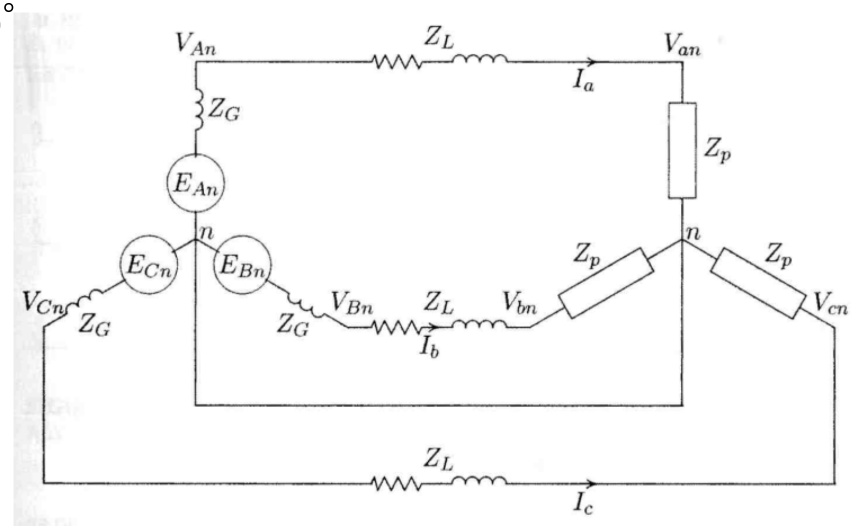
$$\boldsymbol{V_{cn} = |V_p|\angle -240^\circ}$$

$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn} = |V_p|\left(1\angle 0^\circ - 1\angle -120^\circ\right) = \sqrt{3}|V_p|\angle 30^\circ$$

$$V_{bc} = V_{bn} - V_{cn} = |V_p|\left(1\angle -120^\circ - 1\angle -240^\circ\right) = \sqrt{3}|V_p|\angle -90^\circ$$

$$V_{ca} = V_{cn} - V_{an} = |V_p|\left(1\angle -240^\circ - 1\angle 0^\circ\right) = \sqrt{3}|V_p|\angle 150^\circ$$

=> $\boldsymbol{V_L = \sqrt{3}|V_p|\angle 30^\circ}$



$$I_a = \frac{V_{an}}{Z_p} = |I_p|\angle -\theta$$

$$I_b = \frac{V_{bn}}{Z_p} = |I_p|\angle -120^\circ - \theta$$

$$I_c = \frac{V_{cn}}{Z_p} = |I_p|\angle -240^\circ - \theta$$

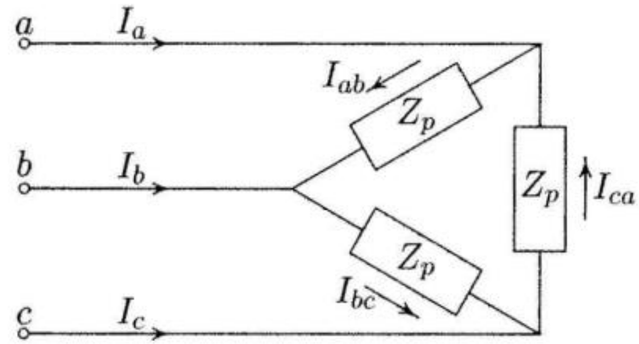
=> $\boldsymbol{I_L = I_P}$

✓ اندازه ولتاژ خط به خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژ خط به خنثی است.

✓ ولتاژ خط به خط، یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل تشکیل می دهد.

✓ ولتاژ های خط به خط، از دسته ولتاژ های خط به خط خنثی ۳۰ درجه جلو می افتد.

❑ Δ connected load relations:



$$\boldsymbol{V_{an} = |V_p|\angle 0^\circ}$$

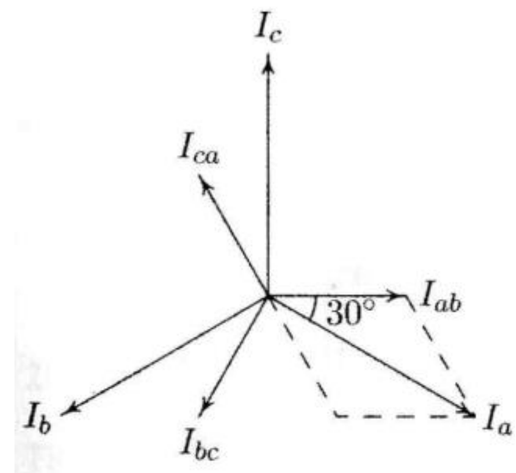
$$\boldsymbol{V_{bn} = |V_p|\angle{-120}^\circ} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{V_L = V_P}$$

$$\boldsymbol{V_{cn} = |V_p|\angle{-240}^\circ}$$

$$I_{ab} = |I_p|\angle 0^\circ$$

$$I_{bc} = |I_p|\angle -120^\circ$$

$$I_{ca} = |I_p|\angle -240^\circ$$



$$I_a = I_{ab} - I_{ca} = |I_p|(1\angle 0^\circ - 1\angle -240^\circ) = \sqrt{3}|I_p|\angle -30^\circ$$

$$I_b = I_{bc} - I_{ab} = |I_p|(1\angle -120^\circ - 1\angle 0^\circ) = \sqrt{3}|I_p|\angle -150^\circ$$

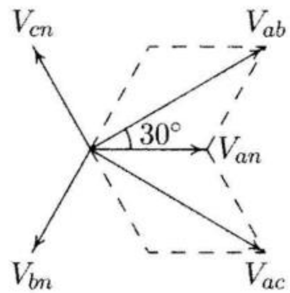
$$I_c = I_{ca} - I_{bc} = |I_p|(1\angle - 240^\circ - 1\angle -120^\circ) = \sqrt{3}|I_p|\angle 90^\circ$$

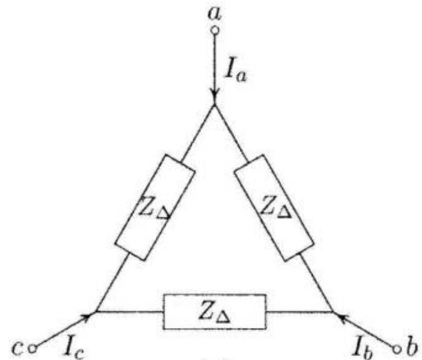
$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{I_L = \sqrt{3}|I_p|\angle - 30^\circ}$$

✓ تذکر: در سیستم های سه فاز مرسوم است که با مقادیر مؤثر کار می کنند.

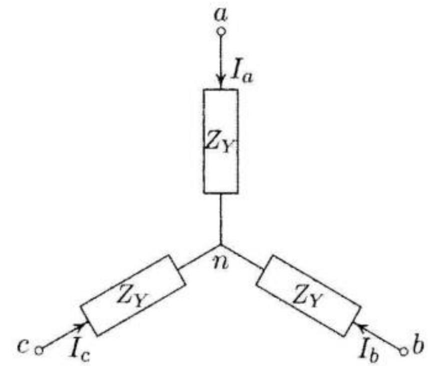
✓ تذکر: متداول است که به جای ولتاژ خط به خط، به اختصار ولتاژ خط گفته شده و به ولتاژ فاز ـ نوترال، به اختصار ولتاژ فاز گفته می شود (هم در سر بار و هم در سر مولد). جریان ها، همان جریان فاز بار یا مولد هستند.

❑ Δ to Y transformation:





(a)



(b)

For the Δ-connected circuit, the phase current I_a is given by

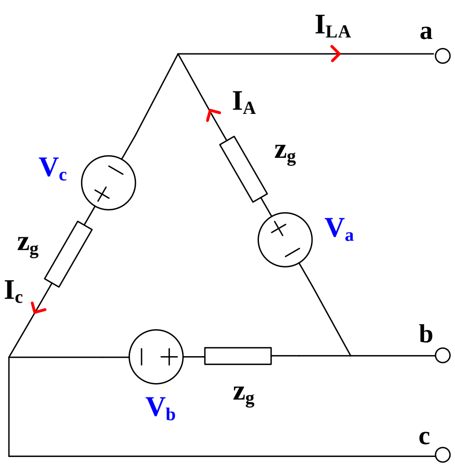
$$I_a = \frac{V_{ab}}{Z_\Delta} + \frac{V_{ac}}{Z_\Delta} = \frac{V_{ab} + V_{ac}}{Z_\Delta}$$

$$V_{ab} + V_{ac} = \sqrt{3}|V_{an}|\angle 30^\circ + \sqrt{3}|V_{an}|\angle -30^\circ = 3V_{an}$$

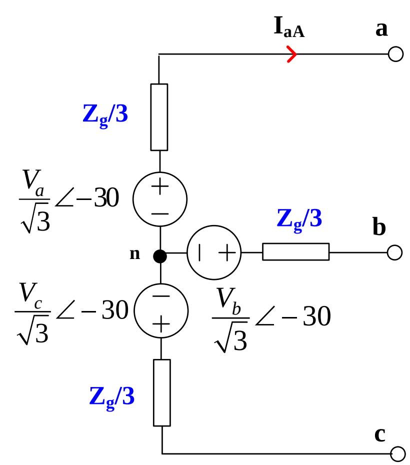
$$\Rightarrow \quad V_{an} = \frac{Z_\Delta}{3} I_a$$

Now, for the Y-connected circuit: $\quad V_{an} = Z_Y I_a$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}}$$

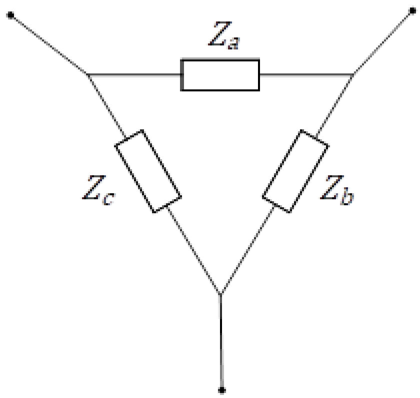


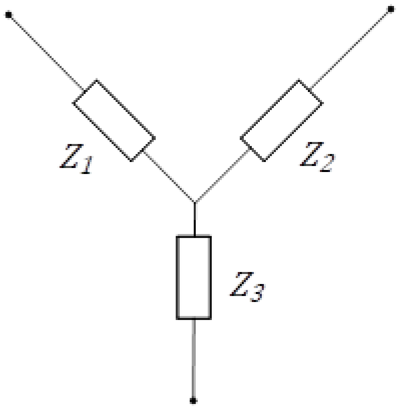
$\equiv$



❑ در حالت مولد سه فاز متعادل، تبدیل ستاره به مثلث به شکل مقابل است.

❖ **اگر بارها نامتعادل باشند، تبدیل Y به Δ با روابط زیر انجام می شود:**





$$Z_1 = \frac{Z_a Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c} \qquad Z_2 = \frac{Z_b Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c} \qquad Z_3 = \frac{Z_c Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

❖ **نکته مهم:** همیشه لازم است که در تحلیل مدارهای Δ، بار وصل شده به صورت Δ را به بار وصل شده به صورت Y تبدیل کنید. منابع وصل شده به صورت Δ همراه با امپدانس مولد را به منابع وصل شده به صورت Y همراه با امپدانس معادل Y تبدیل کنید تا بتوان راحت تر از قوانین KVL و KCL استفاده کرد. در نهایت مدارها بر مبنای حالت ستاره تحلیل نمایید.

❖ پس یک مولد سه فاز وصل شده به بار سه فاز می تواند یکی از چهار حالت زیر را داشته باشد:

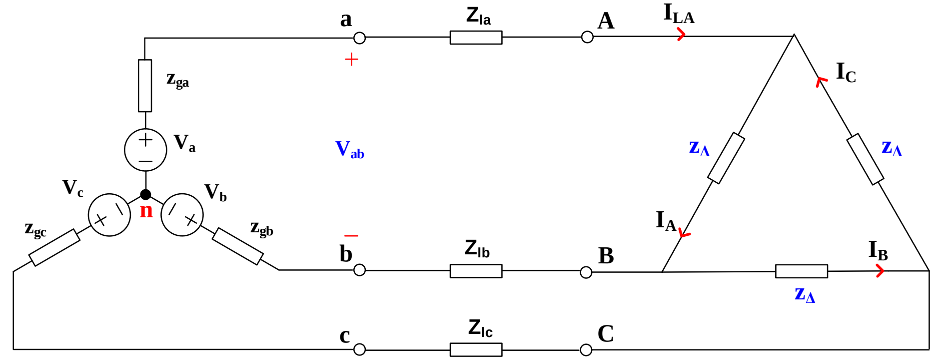
۱- منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Y یا مدار Y-Y؛

۲- منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Δ یا مدار Y-Δ؛

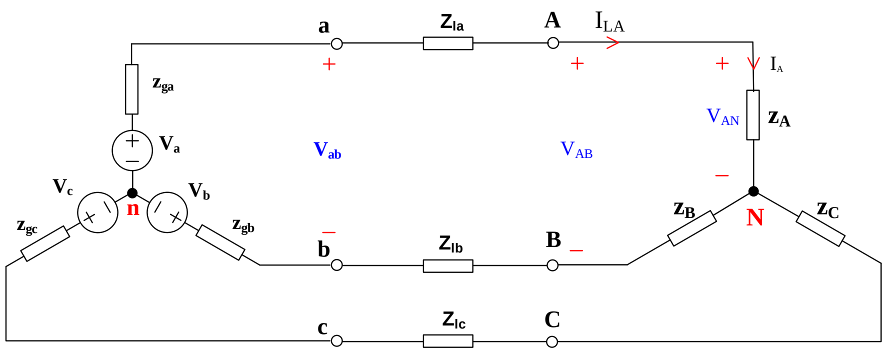
۳- منبع وصل شده به صورت Δ و بار وصل شده به صورت Y یا مدار Δ-Y؛

۴- منبع وصل شده به صورت Δ و بار وصل شده به صورت Δ یا مدار Δ-Δ؛

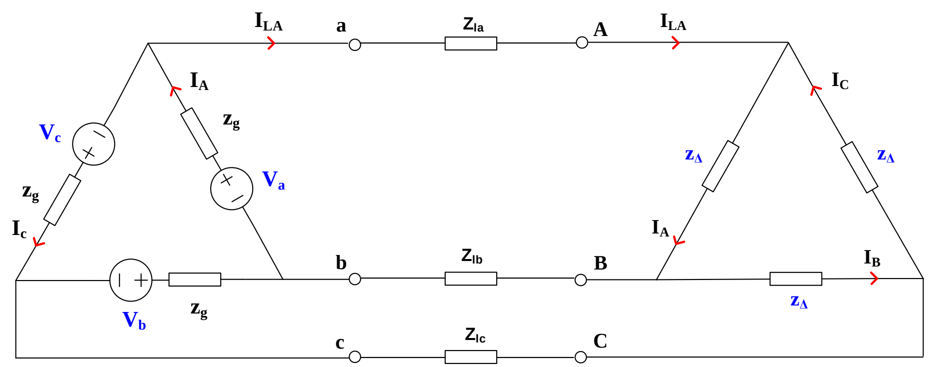
پس از تحلیل مدار **Y-Y** نشان می دهیم که در مدارهای متعادل، صورت های دیگر را می توان به مدار **Y-Y** تبدیل کرد.



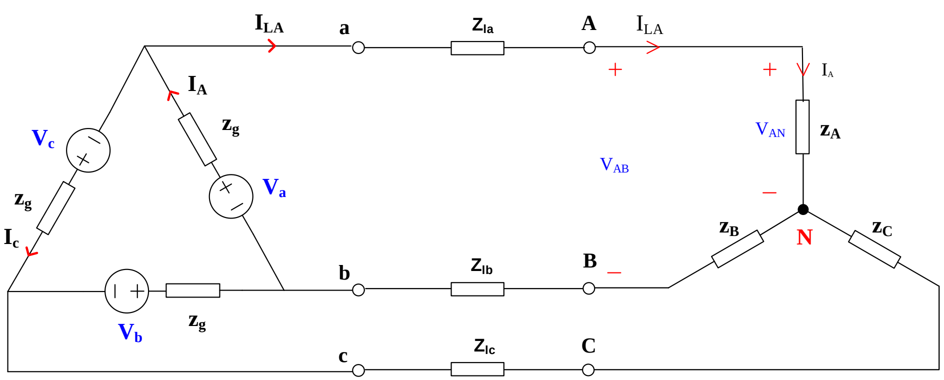
آرایش ستاره ـ مثلث



آرایش ستاره ـ ستاره

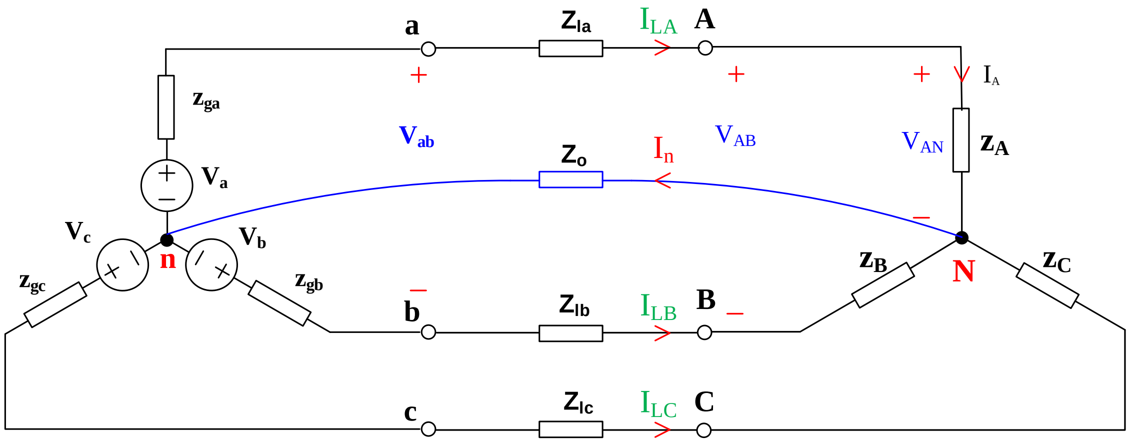


آرایش مثلث ـ مثلث



آرایش مثلث ـ ستاره

❖ تحلیل آرایش Y-Y در حالت متعادل:



$$Z_{ga} = Z_{gb} = Z_{gc} = Z_g$$

$$Z_{la} = Z_{lb} = Z_{lc} = Z_l$$

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z_Y$$

تحلیل را با فرض مدار نامتعادل آغاز می کنیم تا منظور از متعادل بودن را نشان دهیم. سیم چهارمی هم گره خنثی منبع را به گره خنثی بار وصل می کند.

- ✓ Z_{gc} , Z_{gb}, Z_{ga} نشان دهنده امپدانس های درونی متناظر با هر سیم پیچ فاز منابع ولتاژ است.
- ✓ Z_{lc}, Z_{lb}, Z_{la} نشان دهنده امپدانس هر سیم خط فازی است که منبع را به بار وصل می کند.
- ✓ Z_0امپدانس سیم خنثی است که گره خنثی منبع را به گره خنثی بار وصل می کند.
- ✓ Z_A, Z_B, Z_C نشان دهنده امپدانس هر فاز بار هستند.

اکنون نشان می دهیم که در یک سیستم متعادل V_N باید برابر صفر باشد:

$$\frac{V_N}{Z_0} + \frac{V_N - V_a}{Z_A + Z_{la} + Z_{ga}} + \frac{V_N - V_b}{Z_B + Z_{lb} + Z_{gb}} + \frac{V_N - V_c}{Z_C + Z_{lc} + Z_{gc}} = 0$$

$$Z_\varphi = Z_A + Z_{la} + Z_{ga}$$

$$V_N\left(\frac{1}{Z_0} + \frac{3}{Z_\varphi}\right) = \frac{V_a + V_b + V_c}{Z_\varphi}$$

$$V_a + V_b + V_c = 0$$

$$V_N = 0$$

$$I_n = \frac{V_N - V_n}{Z_o} = 0$$

- ✓ یعنی هیچ اختلاف پتانسیلی میان گره خنثی منبع (n) و گره خنثی بار (N) وجود ندارد و بنابراین جریان گذرده از سیم خنثی صفر است. پس می توان سیم خنثی را از یک مدار Y-Y متعادل حذف کرد.

✓ اگر جریان های سه فاز را به دست بیاوریم:

$$I_{LA} = \frac{V_a}{Z_{g+}Z_l + Z_Y} = \frac{V_a}{Z_{total}}$$

$$I_{LB} = \frac{V_b}{Z_{g+}Z_l + Z_Y} = \frac{V_b}{Z_{total}}$$

$$I_{LC} = \frac{V_c}{Z_{g+}Z_l + Z_Y} = \frac{V_c}{Z_{total}}$$

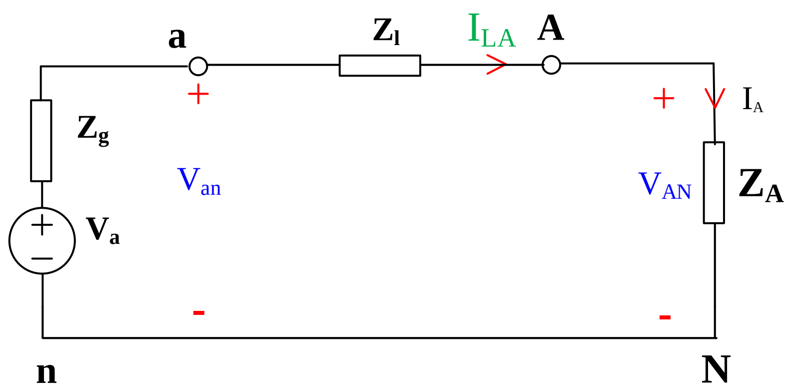
جریان های سیستم سه فاز متعادل می باشند.

$$I_{LA} + I_{LB} + I_{LC} = 0$$

یعنی در یک سیستم سه فاز متعادل، سه جریان خط، یک دسته جریان های سه فاز متعادل تشکیل می دهند. یعنی جریان هر سه خط، از لحاظ دامنه و فرکانس، یکسان بوده و دقیقاً به اندازه ۱۲۰ درجه با دو جریان دیگر اختلاف فاز دارد. با محاسبه I_{aA} می توان جریان های I_{bB} و I_{cC} را بدون محاسبه و با دانستن دنباله فازی نوشت.

جریان در فاز a برابر با ولتاژ ایجاد شده در فاز a مولد تقسیم بر امپدانس کل فاز a است. سیم خنثی توسط یک مدار اتصال کوتاه جایگزین شده است.

توجه شود که جریان گذرنده از سیم خنثی در این حالت صفر نیست و برابر I_{aA} است. لیکن جریان در سیم خنثی کل صفر است.



مدار معادل تک فاز مدار سه فاز متعادل Y-Y (دیاگرام تک خطی – Single-line Diagram)

❑ **مثال) مدار سه فاز Y-Y:** مولد سه فاز با دنباله (توالی) فاز مثبت و امپدانس 0.2+j 0.5 اهم بر فاز داریم. ولتاژ هر فاز مولد 120V، امپدانس هر خطر 0.8+j 1.5 اهم بر فاز، و امپدانس بار 39+j28 اهم بر فاز(بار متعادل) است. مطلوب است:

الف) تعیین مدار معادل تکفاز این سیستم سه فاز؛

ب) محاسبه جریان های خط I_{aA}, I_{bB}, I_{cC}؛

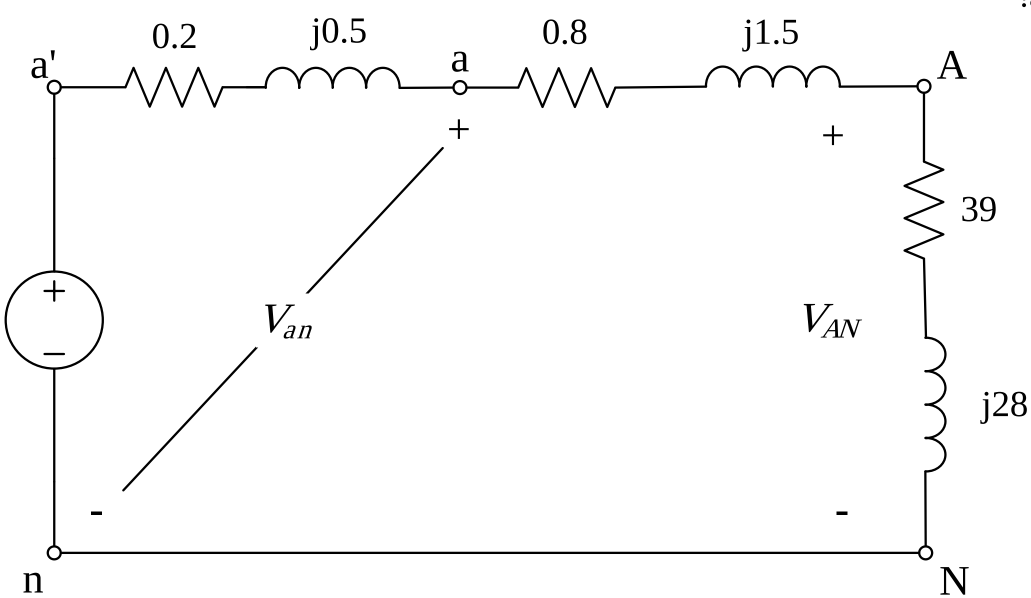
پ) محاسبه ولتاژ خط به خنثی در سرهای بار؛

ث) محاسبه ولتاژهای خط به خنثی در سرهای مولد؛

ج) محاسبه ولتاژهای خط در سرهای مولد؛

■ **حل)**

الف) مدار معادل تکفاز این سیستم سه فاز



ب) محاسبه جریان های خط

$$I_{aA} = \frac{120\angle 0}{(0.2+0.8+39)+j(0.5+1.5+28)} = \frac{120\angle 0}{40+j30} \Rightarrow I_{aA} = 2.4\angle -36.87$$

برای دنباله فازی مثبت داریم:

$$I_{bB} = 2.4\angle -156.87 \quad , \qquad I_{cC} = 2.4\angle 83.13$$

پ) محاسبه ولتاژ خط به خنثی در سر های بار

$$V_{AN} = (39 + j28)(2.4\angle -36.87) = 115.22\angle -1.19$$

برای دنباله فازی مثبت داریم:

$$V_{BN} = 115.22\angle -121.19 \quad , \qquad V_{CN} = 115.22\angle 118.81$$

ت) محاسبه ولتاژ های خط در سر های بار

$$V_{AB} = (\sqrt{3}\angle 30)V_{AN} = 199.58\angle 28.81 \quad , V_{BC} = 199.58\angle -91.19 \, , V_{CA} = 199.58\angle 148.81$$

ث) محاسبه ولتاژ های خط به خنثی در سر های مولد

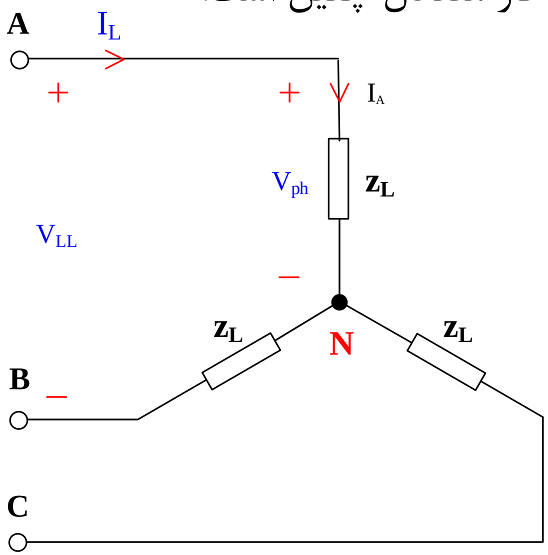
$$V_{an} = 120\angle 0 - (0.2 + j0.5)(2.4\angle -36.87) = 118.9\angle -0.32$$
$$V_{bn} = 118.9\angle -120.32 \quad , \qquad V_{cn} = 118.9\angle 119.68$$

ج) محاسبه ولتاژ های خط در سرهای مولد

$$V_{ab} = (\sqrt{3}\angle 120)V_{an} = 205.94\angle 29.68 \; , V_{bc} = 205.94\angle -90.32 \, , V_{ca} = 205.94\angle 149.68$$

****

❖ **محاسبات توان در مدارهای متعادل سه فاز:** توان لحظه ای داده شده به بار سه فاز متعادل چنین است:



$$V_{an} = \sqrt{2}V_{rms}\cos(\omega t + \theta_v)$$

$$V_{bn} = \sqrt{2}V_{rms}\cos\left(\omega t + \theta_v - 120^{\circ}\right)$$

$$V_{cn} = \sqrt{2}V_{rms}\cos\left(\omega t + \theta_v - 240^{\circ}\right)$$

$$i_a = \sqrt{2}I_{rms}\cos(\omega t + \theta_i)$$

$$i_b = \sqrt{2}I_{rms}\cos\left(\omega t + \theta_i - 120^{\circ}\right)$$

$$i_c = \sqrt{2}I_{rms}\cos\left(\omega t + \theta_i - 240^{\circ}\right)$$

$$\boldsymbol{p_{3ph} = V_{an}i_a + V_{bn}i_b + V_{cn}i_c}$$

$$p_{3ph} = 2V_{rms}I_{rms}cos(\omega t + \theta_v)cos(\omega t + \theta_i) + 2V_{rms}I_{rms}cos\left(\omega t + \theta_v - 120^{\circ}\right)cos(\omega t + \theta_i - 120^{\circ}) + 2V_{rms}I_{rms}cos\left(\omega t + \theta_v - 240^{\circ}\right)cos(\omega t + \theta_i - 240^{\circ})$$

$$\begin{aligned} => p_{3ph} &= V_{rms}I_{rms}[cos(\theta_v - \theta_i) + cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] \\ &+ V_{rms}I_{rms}\left[cos(\theta_v - \theta_i) + cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i - 240^{\circ})\right] \\ &+ V_{rms}I_{rms}\left[cos(\theta_v - \theta_i) + cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i - 480^{\circ})\right] \end{aligned}$$

$$=> \boldsymbol{P_{3ph} = 3V_{ph,rms}I_{ph,rms}\cos\theta}$$

✓ **توان لحظه ای کل در مدار سه فاز متعادل ثابت و برابر با توان متوسط است.**

$$\left.\begin{aligned} S_{3ph} &= 3V_{ph}I_{ph}^{*} \\ S_{3ph} &= P_{3ph} + jQ_{3ph} \end{aligned}\right\} => \boldsymbol{Q_{3ph} = 3V_{ph,rms}I_{ph,rms}\sin\theta}$$

توان تحویل شده به هر فاز نیز در سیستم معادل چنین است:

$$\boldsymbol{P_{ph} = V_{ph,rms}I_{ph,rms}\cos\theta}$$

- مقدار توان لحظه ای کل (یا متوسط توان) علاوه بر مقادیر موثر ولتاژ و جریان فاز (V_{ph} و I_{ph})، با مقادیر ولتاژ و جریان خط (V_{LL} و I_L) نیز قابل بیان است (مستقل از نوع اتصال ستاره یا مثل بار یا منبع):

$$P_{3\phi} = \sqrt{3} V_{L,rms} I_{L,rms} \cos\theta \qquad Q_{3\phi} = \sqrt{3} V_{L,rms} I_{L,rms} \sin\theta$$

- **خلاصه روابط توان در مدارهای تک فاز AC سینوسی و نیز مدارهای سه فاز AC سینوسی متعادل را به صورت زیر می توان جمع بندی کرد:**

سیستم سه فاز

$$P_{3ph} = 3V_{ph,rms} I_{ph,rms} \cos\varphi = \sqrt{3} V_{L,rms} I_{L,rms} \cos\varphi$$

$$Q_{3ph} = 3V_{ph,rms} I_{ph,rms} \sin\varphi = \sqrt{3} V_{L,rms} I_{L,rms} \sin\varphi$$

$$|S_{3ph}| = 3V_{ph,rms} I_{ph,rms} = \sqrt{3} V_{L,rms} I_{L,rms}$$

سیستم تک فاز

توان متوسط P: $P_{ph} = V_{ph,rms} I_{ph,rms} \cos\varphi$

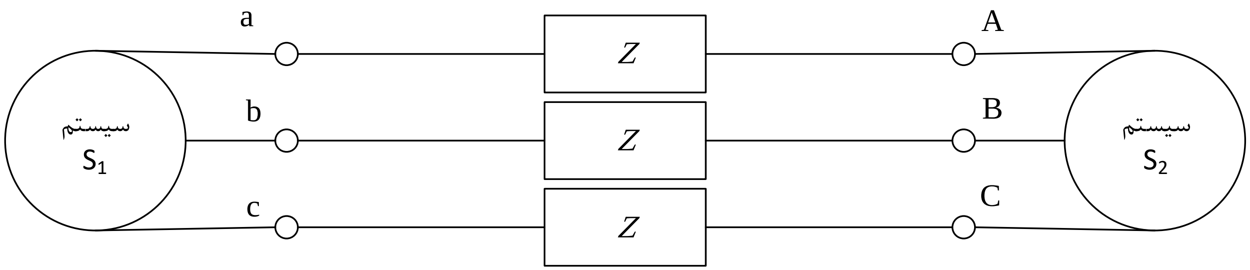
توان راکتیو Q: $Q_{ph} = V_{ph,rms} I_{ph,rms} \sin\varphi$

توان ظاهری S: $|S_{ph}| = V_{ph,rms} I_{ph,rms}$

❑ **مثال)** دو سیستم سه فاز متعادل S_2 و S_1 با خطی با امپدانس Z به یکدیگر وصل شده اند که در آن $Z = 1 + j2$ و ولتاژهای خط بر حسب مقادیر مؤثر عبارتند از:

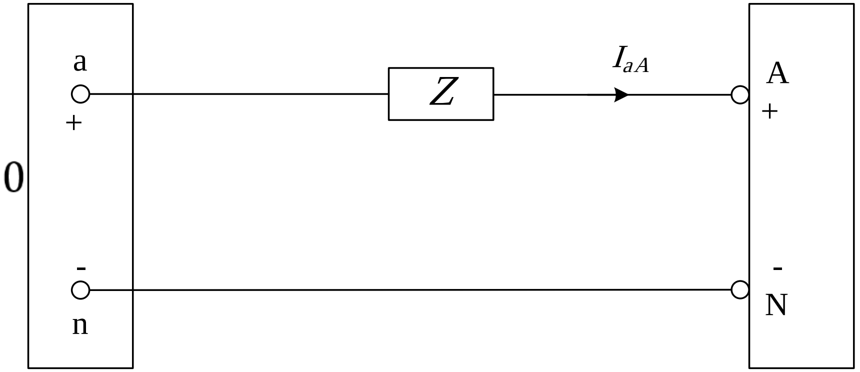
$V_{ab} = 12\angle 0^{\circ} KV$, $\qquad V_{AB} = 12\angle 5^{\circ} KV$

کدام سیستم منبع و کدام سیستم بار است؟ توان متوسط تحویل داده شده منبع به بار چقدر است؟



■ **حل)**

دیاگرام تکفاز معادل سیستم داده شده در شکل زیر نشان داده شده است:



$$\frac{12}{\sqrt{3}}\angle -30 \qquad\qquad \frac{12}{\sqrt{3}}\angle -25$$

محاسبه جریان I_{aA} :

$$I_{aA} = \frac{V_{an} - V_{AN}}{Z} = \frac{\frac{12000}{\sqrt{3}}\angle -30 - \frac{12000}{\sqrt{3}}\angle -25}{1 + j2} = 270.31\angle -180.93$$

توان متوسط دریافتی توسط سیستم S_2 عبارت است از:

$$P_2 = 3V_{ph}I_{ph}\cos\varphi = \sqrt{3}V_{L,rms}I_{L,rms}\cos\varphi = \sqrt{3}*12000*270.3\cos(-25+180.93)=-5.13\text{MW}$$

ملاحظه می شود که توان دریافتی سیستم ۲ منفی است. پس سیستم ۲ به عنوان بار رفتار نمی کند، بلکه به عنوان منبع رفتار می کند و توان 5.13MW تحویل می دهد.

توان متوسط دریافتی توسط سیستم ۱:

$$I_{Aa} = -I_{aA} = 270.3\angle-360.93 = 270.3\angle-0.93$$

$$\Rightarrow P_1 = \sqrt{3}(12000)(270.3)Cos(-30+0.93) = 4.910 \quad MW$$

توان متوسط دریافتی سیستم ۱ مثبت است پس سیستم مانند بار عمل می کند. اختلاف توان تحویلی سیستم ۱ و توان دریافتی سیستم ۲ توان تلف شده در مقاومت خطوط انتقال است.

****

۵–۵– نکات تکمیلی و پیوست ها

❑ اثبات تساوی ضرایب القایی متقابل میان دو سلف ($M_{12} = M_{21}$)

فرض کنید $M_{12} \neq M_{21}$ و $i_1(t) = \text{Sint}$ و $i_2(t) = \text{Cost}$ باشد. توان لحظه ای وارد شونده به سیم پیچ های تزویج شده عبارت است از:

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = i_1(t)[L_{11}\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}] + i_2(t)[M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}]$$

$$\Rightarrow p(t) = L_{11}\sin t.\cos t + M_{12}\,\text{sint}.(-\sin t) + M_{21}Cos\ t.Cos\ t + L_{22}Cost(-Sin\ t)$$

$$\Longrightarrow p(t) = \frac{1}{2}L_{11}\sin 2t - \frac{1}{2}M_{12}(1 - Cos2t) + \frac{1}{2}M_{21}(1 + Cos2t) - \frac{1}{2}L_{22}\,Sin2t$$

اکنون توان متوسط تحویل داده شده را حساب می کنیم . مقدار متوسط جملات سینوسی در طول یک دوره تناوب صفر است. بنابراین:

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{2}(M_{21} - M_{12}) \geq 0$$

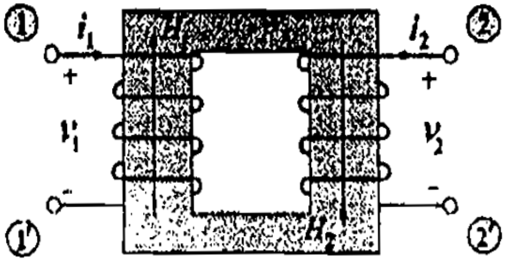
توان متوسط نمی تواند منفی باشد. اکنون بار دیگر فرض کنید که $i_1(t) = \text{Cost}$ و $i_2(t) = \text{sint}$. محاسبات بالا را تکرارکنید تا به دست آورید:

$$P_{av} = \frac{1}{2}(M_{12} - M_{21}) \geq 0$$

بنابراین تنها شرطی که ممکن است روابط بالا به صورت همزمان بر قرار باشد این است که:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

بنابراین ضریب القاء متقابل سلف های تزویج شده با هم برابر هستند.



❑ اثبات تعیین علامت M در سلف های مزدوج با استفاده از روابط انرژی

فرض کنید نفوذ پذیری مغناطیسی هسته خیلی بیشتر از نفوذپذیری مغناطیسی هوا باشد. تحت این شرایط تقریباً تمام انرژی مغناطیسی در هسته ذخیره می شود. اگر P یک نقطه از هسته مغناطیسی باشد، انرژی ذخیره شده در جزء حجم dv که شامل نقطه P است، به صورت $\frac{1}{2}\mu|H|^2dv$ است. که در آن μ نفوذپذیری هسته است.

فرض کنید با استفاده از مولدهای مناسبی، جریان های ثابت و مثبت i_1 و i_2 را داشته باشیم و H_1 میدان مغناطیسی ناشی از i_1 تنها و H_2 میدان مغناطیسی ناشی از i_2 تنها باشد. انرژی ذخیره شده در جزء حجم dv چنین است :

$$\frac{1}{2}\mu|H_1+H_2|^2\mathrm{dv}=[\frac{\mu}{2}|H_1|^2+\mu H_1H_2+\frac{\mu}{2}|H_2|^2]dv$$

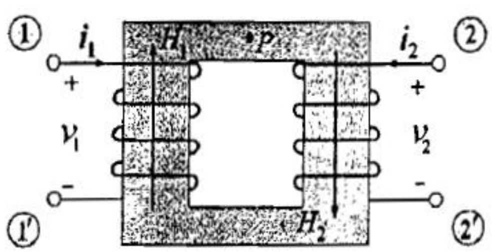
که در آن $H_1.\ H_2$ نمایشگر حاصلضرب عددی دو بردار H_1 و H_2 است.

در این رابطه $\frac{1}{2}\mu|H_1|^2\mathrm{dv}$ انرژی مغناطیسی ناشی از جریان i_1 تنها است و $\frac{1}{2}\mu|H2|^2\mathrm{dv}$ انرژی مغناطیسی ناشی از جریان i2 تنها است. پس جمله $\mu H_1.H_2dv$ انرژی ذخیره شده ناشی از وجود توام i_1 و i_2 است.

اگر $H_1.H_2$ مثبت باشد، انرژی ذخیره شده در dv وقتی که i_1 و i_2 همزمان جاری شوند، از مجموع انرژی های ذخیره شده در dv وقتی که هر یک به تنهایی جاری شوند، بزرگتر است.

در شکل زیر، قانون دست راست نشان می دهد که جهت های H_1 و H_2 یکسان است. بنابراین انرژی ذخیره شده در dv وقتی که هر دوی i_1 و i_2 جریان داشته باشند، از مجموع انرژی های ذخیره شده وقتی که i_1 و i_2 به تنهایی جریان داشته باشند، بزرگتر است.

اگر جهت یکی از سیم پیچ ها یا جهت جریان را عوض می کردیم، $H_1.H_2$ منفی می شد.



❑ اثبات تعیین علامت M در سلف های مزدوج با استفاده از روش مداری

$i_1(t)$ و $v_1(t)$ توان لحظه ای داده شده توسط محیط خارج به سلفی با سرهای1 و `1 بوده و $v_2(t)$ $i_2(t)$ توان لحظه ای داده شده توسط محیط خارج به سلفی با سرهای 2 و `2 است. بنابراین:

$$\xi[i_1(t), i_2(t)] = \int_0^t (v_1(t`)i_1(t`) + (v_2(t`)i_2(t`))dt`$$

با جایگزینی دو عبارت روبرو، معادله زیر را به دست می آوریم:

$$V_1=M\frac{di_1}{dt}+L_{22}\frac{di_2}{dt} \qquad V_1=L_{11}\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}$$

$$\varepsilon[i_1(t), i_2(t)] = \int_0^t (L_{11}i_1\frac{di_1}{dt}+M(i_1\frac{di_2}{dt} + i_2\frac{di_1}{dt})+L_{22}i_2\frac{di_2}{dt})dt`$$

با فرض انرژی اولیه صفر ، یعنی $i_1(0)=0$ و $i_2(0)=0$ بدست می آوریم :

$$\xi[i_1(t), i_2(t)] = \frac{1}{2}L_{11}{i_1}^2(t) + Mi_1(t)i_2(t)+\frac{1}{2}L_{22}{i_2}^2(t)$$

که می توان عبارت بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\xi[i_1, i_2] = \varepsilon(i_1,0) + Mi_1.i_2 + \varepsilon(0, i_2)$$

که در آن $\varepsilon(i_1,0)$ انرژی در حالتی است که فقط i_1 جاری شود (یعنی $i_2= 0$ باشد). و $\varepsilon(0,i2)$ انرژی در حالتی است که فقط i_2 جاری شود (یعنی $i_1= 0$ باشد).
اگر i_1,i_2 مثبت و $M>0$ باشند، کل انرژی ذخیره شده از مجموع انرژی های ذخیره شده در حالتی که به ترتیب جریان تنهایi_1 و جریان تنهای i_2 عبور می کند، بزرگتر است.

❑ اثبات رابطه و نیز محدوده ضریب تزویج k

انرژی ذخیره شده در سلفهای تزویج شده چنین بدست آمد:

$$\xi[i_1,i_2] = \frac{1}{2}L_{11}{i_1}^2 + Mi_1i_2 + \frac{1}{2}L_{22}{i_2}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{L}_{11}(i_1+\frac{M}{L_{11}}i_2)^2+ Mi_1i_2+ \frac{1}{2}(\mathrm{L}_{22}\text{-}\frac{M^2}{L_{11}}){i_2}^2$$

انرژی ذخیره شده در مدار پسیو، برای هر مقدار i_1 و i_2 نامنفی است و بنابراین اگر $\mathrm{i}_1 = -\frac{Mi_2}{L_{11}}$ عبارت زیر باید نامنفی باشد (توجه: یعنی دترمینان ماتریس اندوکتانس باید نامنفی باشد):

$$\frac{1}{2}(\mathrm{L}_{22}\text{-}\frac{M^2}{L_{11}}){i_2}^2 = \xi[i_1,i_2]$$

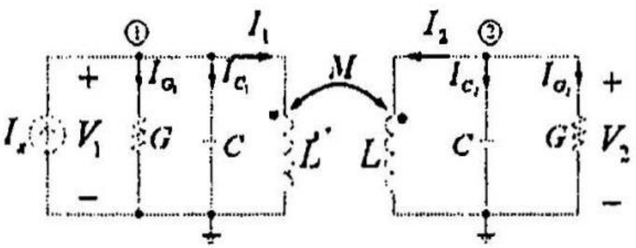
یعنی می توان نوشت:

$$\mathrm{L}_{22} - \frac{M}{L_{11}} \geq 0 \ \rightarrow L_{11}L_{22} - M^2 \geq 0$$

$$L_{11}L_{22} \geq M^2 \rightarrow \frac{M^2}{L_{11}L_{22}} \leq 1 \rightarrow k = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} \leq 1$$

یعنی ضریب تزویج دو سلف تزویج شده کوچکتر یا مساوی ۱ است.

❑ مدار تطبیق شده مضاعف



دو مدار RLC موازی یکسان که با هم تزویج مغناطیسی دارند را در نظر بگیرید.
می‌خواهیم تابع شبکه $H(j\omega)=\frac{V_2}{I_S}$ را تعیین و رفتار فیلتری مدار را مشخص کنیم.
ماتریس ضرایب القای سلف های تزویج شده چنین است:

$$L=\begin{bmatrix} L & M \\ M & L \end{bmatrix}=L\begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن k ضریب تزویج است.

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=\frac{M}{L}$$

چون می‌خواهیم تحلیل گره انجام دهیم راحت‌تر است از ماتریس اندوکتانس معکوس استفاده شود.

$$\Gamma=\Gamma^{-1}=\frac{1}{L(1-k^2)}\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

فرض کنید جریان ورودی سینوسی به صورت زیر باشد:

$$i_s(t)=\mathrm{Re}[I_s e^{j\omega t}]$$

در این صورت ولتاژ خروجی سینوسی در حالت دائمی، چنین خواهد بود:

$$v_2(t)=\mathrm{Re}[V_2\ \ e^{j\omega t}]$$

جریانهای سلفهای تزویج شده بر حسب ولتاژهای آنها را با استفاده از ماتریس اندوکتانس معکوس به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{j\omega}\Gamma\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{j\omega}\frac{1}{L(1-k^2)}\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad I_1=\frac{1}{j\omega L(1-k^2)}[V_1-kV_2]$$

$$I_2=\frac{1}{j\omega L(1-k^2)}[-kV_1+V_2]$$

اکنون KCL را در گره‌های ۱ و ۲ مدار می‌نویسیم:

$$\left.\begin{aligned} &I_{G_1}+I_{C_1}+I_1=I_S \\ &I_{G_2}+I_{C_2}+I_2=0 \\ &I_{C_2}=j\omega CV_2\ ,\ I_{G_2}=GV_2\ ,\ I_{C_1}=j\omega CV_1 ,\ I_{G_1}=GV_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left[G+j\omega C+\frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right]V_1-\frac{l}{j\ \omega L(1-k^2)}V_2=I_S \quad (1)$$

$$\frac{-k}{j\ \omega L(1-k^2)}V_1+\left[G+j\ \omega C+\frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right]V_2=0 \quad (2)$$

گرچه می‌توان از این دو معادله V_2 و بنابراین تابع تبدیل را به دست آورد، لکن به دلیل متقارن بودن مدارو معادلات، روش ساده تری برای محاسبه تابع تبدیل وجود دارد. دو متغیر V^+ و V^- را بصورت زیر تعریف کنید :

$$\begin{aligned} 2V^+&=V_1+V_2 & \qquad V1&=V^++V^- \\ &\Rightarrow \\ 2V^-&=V_1-V_2 & \qquad V_2&=V^+-V^- \end{aligned}$$

از جمع معادلات (۱) و (۲) به دست می‌آوریم:

$$\left[G=j\omega C+\frac{1}{j\omega L(1+k)}\right]V^+=\frac{I_S}{2} \quad (3)$$

از تفریق معادلات (۱) و (۲) به دست می‌آوریم:

$$\left[G=j\omega C+\frac{1}{j\omega L(1-k)}\right]V^-=\frac{I_S}{2} \quad (4)$$

معادلات (۳) و (۴) شبیه معادلات مدار تشدید RLC موازی است که در آن فقط مقدار L به ترتیب بصورت L(1 + k) و L(1 – K) تغییر یافته است. فرکانس تشدید مدارهای RLC جدید به صورت روبرو است:

$$\omega_+^2=\frac{1}{LC(1+k)}$$

$$\omega_-^2=\frac{1}{LC(1-k)}$$

که در آن

$$\omega_->\omega_+$$

با بخاطر آوردن رابطه $Q=\omega_0 RC$ به دست می‌آوریم:

$$Q_+ = \omega_+ RC$$

$$Q_- = \omega_- RC$$

از معادلات (۳) و (۴) به دست می‌آوریم:

$$V^+ = \frac{1}{2} RI_S \frac{1}{1+jQ_+(\frac{\omega}{\omega_+}-\frac{\omega_+}{\omega})}$$

$$V^- = \frac{1}{2} RI_S \frac{1}{1+jQ_-(\frac{\omega}{\omega^-}-\frac{\omega_-}{\omega})}$$

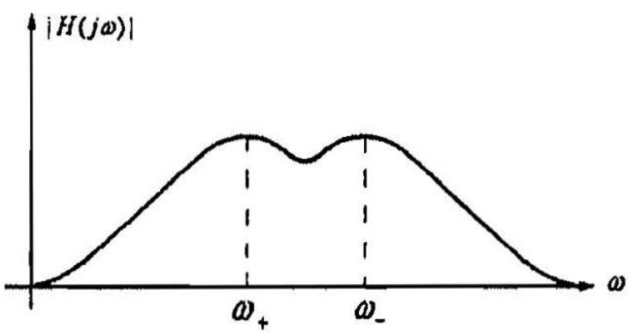
بنابراین فیزور ولتاژ خروجی چنین است:

$$V_2 = \frac{1}{2} RI_s \left[\frac{1}{1+jQ_+(\frac{\omega}{\omega_+}-\frac{\omega_+}{\omega})} - \frac{1}{1+jQ_-(\frac{\omega}{\omega_-}-\frac{\omega_-}{\omega})} \right]$$

در نتیجه، تابع شبکه برابر است با:

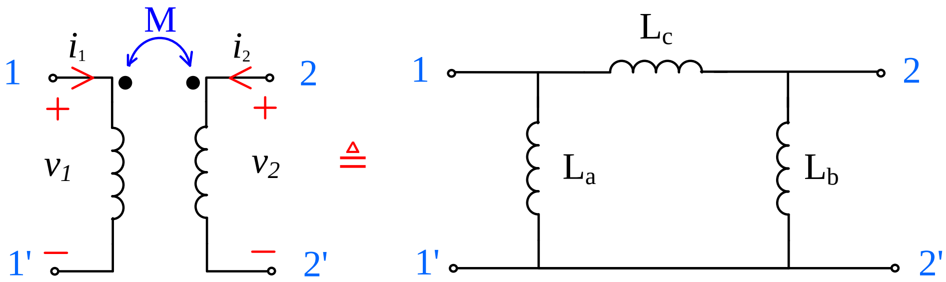
$$H(j\omega) = \frac{V_2}{I_s} = \frac{1}{2} R \left[\frac{1}{1+jQ_+(\frac{\omega}{\omega_+}-\frac{\omega_+}{\omega})} - \frac{1}{1+jQ_-(\frac{\omega}{\omega_-}-\frac{\omega_-}{\omega})} \right]$$

منحنی اندازه نوعی $H(j\omega)$ به صورت روبرو است:



ملاحظه می‌شود که رفتار مدار تطبیق شده مضاعف مانند یک فیلتر میان گذر است لکن پهنای باند آن عریض‌تراست. نوک‌های منحنی تقریباً متناظر با ω^+ و ω^- در مدار RLC تشدید تنها می‌باشد.

❑ به دست آوردن مدار معادل Π برای دو سلف تزویج شده



اعمال KVL در مش وسط به دست می دهد (جریان L_c را i در نظر می گیریم) :

$$L_c \frac{di}{dt} + L_b \frac{di}{dt}(i_2+i) - L_a \frac{di}{dt}(i_1-i) = 0$$

از معادله فوق $\frac{di}{dt}$ را حساب می کنیم:

$$(L_a + L_b + L_c)\frac{di2}{dt} = L_a \frac{di1}{dt} - L_b \frac{di2}{dt} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{L_a \frac{di1}{dt} - Lb \frac{di2}{dt}}{L_a + Lb + L_c}$$

با نوشتن KVL در مش سمت چپ به دست می آوریم:

$$v_1 = L_a \frac{di}{dt}(i_1-i) = L_a \frac{di_1}{dt} - \frac{L_a(L_a \frac{di_1}{dt} - Lb \frac{di_2}{dt})}{L_a + Lb + Lc} = \frac{L_a(L_b+Lc)}{L_a+L_b+Lc}\frac{di_1}{dt} + \frac{L_a L_b}{L_a+L_b+Lc}\frac{di_2}{dt} \qquad (1)$$

با نوشتن KVL درمش سمت راست بدست می آوریم:

$$v_2 = L_b \frac{di}{dt}(i+i_2) = L_b \frac{di_2}{dt} - \frac{L_b(L_a \frac{di_1}{dt} - Lb \frac{di_2}{dt})}{L_a+L_b+Lc} = \frac{L_a L_b}{L_a+L_b+Lc}\frac{di1}{dt} + \frac{L_b(L_a+Lc)}{L_a+L_b+Lc}\frac{di_2}{dt} \qquad (2)$$

با مقایسه معادلات (۱) و (۲) با معادلات سلف های تزویج شده به دست می آوریم:

$$\frac{L_a(Lb + L_c)}{L_a + Lb + Lc} = L_1 \quad (3) \qquad \frac{L_a L_b}{L_a + Lb + Lc} = M \quad (4) \qquad \frac{L_a(Lb + Lc)}{L_a + Lb + Lc} = L_2 \quad (5)$$

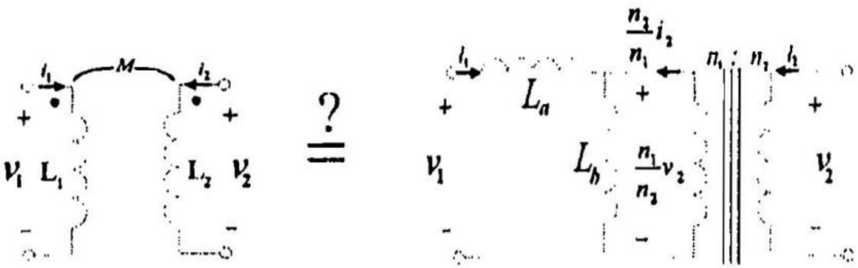
با جایگزینی (۴) در معادلات (۳) و (۵) به دست می‌آوریم:

$$\frac{L_a L_c}{L_a + L_b + L_c} = L_1 - M \qquad \frac{L_b L_c}{L_a + L_b + L_c} = L_2 - M \qquad \frac{L_a L_b}{L_a + L_b + L_c} = M$$

از حل معادلات داریم:

$$L_a = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M} \qquad L_b = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M} \qquad L_c = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M}$$

❖ استفاده از ترانسفورماتور برای جایگزینی تزویج در سلفهای تزویج شده



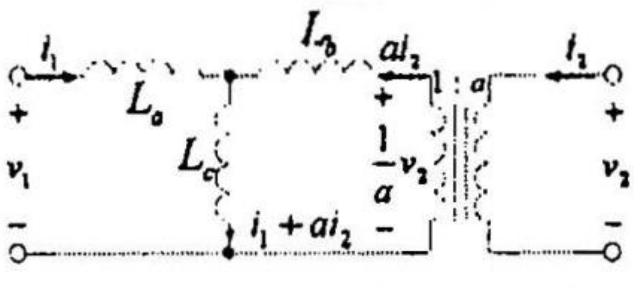
سلفهای L_a و L_b و نسبت تبدیل n_1/n_2 را چنان پیدا کنید که دو مدار فوق با هم معادل باشند.

$$L_1 = L_a + b_a$$

$$L_2 = (\frac{n_2}{n_1})^2 L_b$$

$$M = (\frac{n_2}{n_1}) L_b$$

سلفهای L_a و L_b را چنان پیدا کنید که مدار قابل رفتاری مانند سلف های تزویج شده داشته باشد.



$$v_1 = L_a \frac{di_1}{dt} + L_c \frac{d}{dt}(i_1 + ai_2) = (L_a + L_c)\frac{di_1}{dt} + aL_c \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{1}{a} v_2 = L_b \frac{d}{dt}(ai_2) + L_c \frac{d}{dt}(i_1 + ai_2) \Rightarrow$$

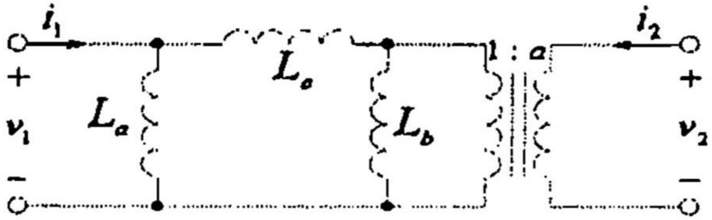
$$v_2 = aL_c \frac{di_1}{dt} + (L_b + L_c)a^2 \frac{di_2}{dt}$$

با انتخاب روابط مقابل، به مقادیر زیر می توان رسید: $M = aL_c \;,\; L_2 = (L_b + L_c)a^2 \;,\; L_1 = L_a + L_c$

$$\Rightarrow \quad L_c = \frac{1}{a} M \quad , \quad L_a = L_1 - \frac{1}{a} M \quad , \quad L_b = \frac{1}{a^2} L_2 - \frac{1}{a} M$$

ملاحظه می شود که روابط فوق برای هر مقدار L_1 و L_2 و M و a بر قرار است. می توان با انتخاب مقدار مناسبی برای a عبارت های $L_a = L_1 - \frac{1}{a} M$ و $L_a = \frac{1}{a^2}(L_2 - aM)$ را همواره مثبت اختیار نمود.

به طریق مشابه برای مدار معادل π می توان برابری زیر را نشان داد:



$$L_e = \frac{L_1L_2 - M^2}{Ma}, L_b = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - Ma}, L_a = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - Ma}$$

✓ **توجه:** می توان ترانسفورمر ایده آل را در سرهای سیم پیچی اول نیز قرار داد و به دست آورد: