فصل ۴:

تجزیه و تحلیل حالت دائم سینوسی و فِیزور

۴-۱- معرفی اعداد مختلط و مفهوم نمایش فیزور؛

۴-۲- تحلیل یک مدار در حالت دائم سینوسی (پاسخ حالت دائمی با ورودی سینوسی)؛

۴-۳- مفاهیم مهم در خصوص رفتار مدارها در حوزه فرکانس؛

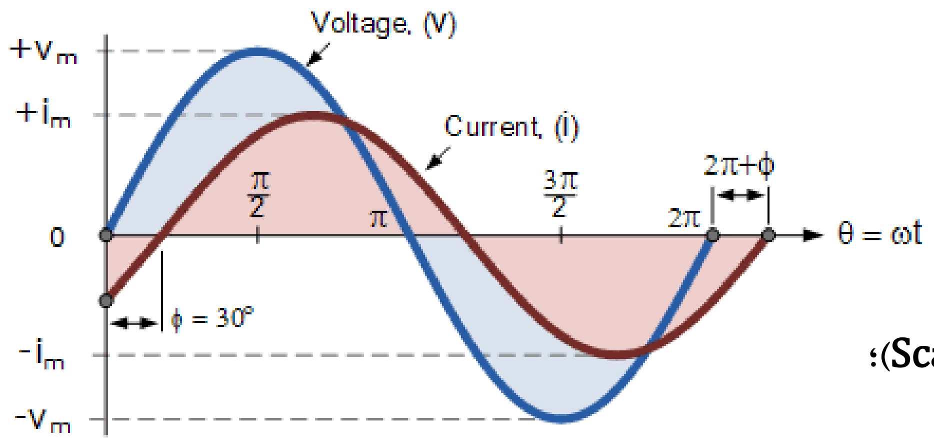
۴-۳-۱- تشدید در مدارهای RLC؛

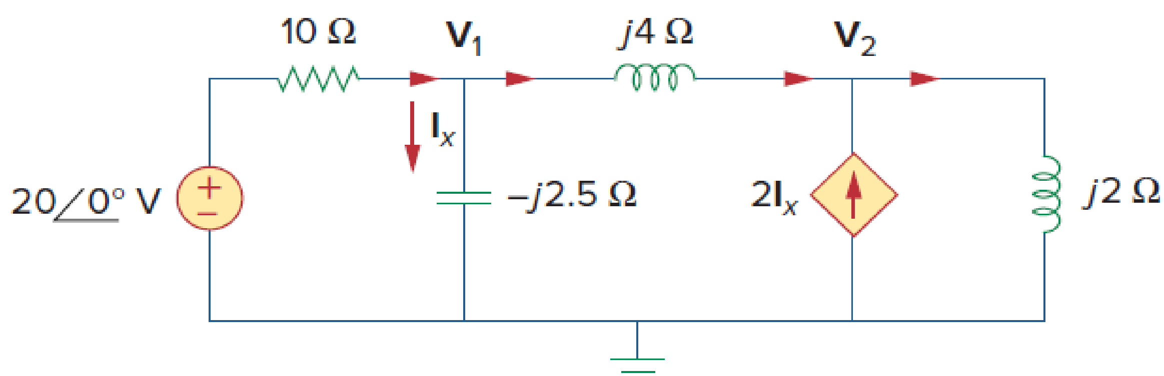
۴-۳-۲- دیاگرام فیزوری؛

۴-۳-۳- تابع شبکه و پاسخ فرکانسی؛

۴-۳- توان در حالت دائم سینوسی؛

۴-۴- نرمالیزه کردن یک مدار یا تغییر مقیاس یک مدار (Scaling)؛





۴-۱- معرفی اعداد مختلط و مفهوم نمایش فیزور

- سیگنال های سینوسی در مهنسی برق نقش مهمی دارند. فرکانس سیگنال های سینوسی می تواند از چند هرتز تا حدود چند کیلو هرتز، مگاهرتز و گیگا هرتز تغییر کند. یاد خواهیم گرفت که اگر پاسخ یک مدار LTI را به هر تابع سینوسی بدانیم، اصولاً پاسخ آن را به هر سیگنال دیگر خواهیم داشت.

- در این فصل، بر پایه نمایش این سیگنال سینوسی با فرکانس داده شده توسط یک عدد مختلط، روش بسیار ساده تری برای محاسبه پاسخ مدار به ورودی سینوسی بدست می آوریم (تجزیه و تحلیل حالت دائم سینوسی و روش فیزوری). در تجزیه و تحلیل حالت دایمی سینوسی:
  - ✓ سیگنال های ورودی مدار منحصراً سینوسی می باشند.
  - ✓ پاسخ برای $t \to \infty$ (حالت دایمی) مورد توجه است.
  - ✓ خواهیم دید که برای محاسبه پاسخ حالت دائمی، نیازی به حل معادلات دیفرانسیل نمی باشد. شرایط اولیه نیز نقشی در پاسخ دائمی ندارند.

- **یادآوری:** نمایش مختلط و قطبی اعداد

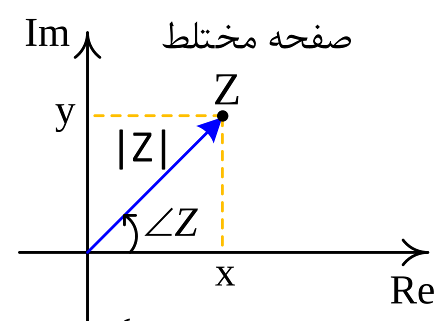
نمایش مختلط :

$$\begin{cases} j = \sqrt{-1} \\ Z = x + jy \\ x = \mathrm{Re}[Z] \\ y = \mathrm{Im}[Z] \end{cases}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2)$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\mathrm{Z} + Z^* = 2\mathrm{x} = 2\mathrm{Re}[\mathrm{z}]$$

$$\mathrm{Z} - Z^* = 2\mathrm{jy} = 2\mathrm{jIm}[\mathrm{z}]$$



$$\begin{cases} x = |z| cos\theta \\ y = |z| sin\theta \end{cases}$$

نمایش قطبی :

$$\begin{cases} Z = |z| e^{j\angle Z} \quad |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \ \angle Z = \tan^{-1}(y/x) \\ Z^* = x - jy \quad ZZ^* = |Z|^2 \quad \mathrm{Z} + Z^* = 2\mathrm{Re}[Z] \\ Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1||Z_2| e^{j(\angle Z_1 + \angle Z_2)} \end{cases}$$

❖ **نمایش فیزوری یک سیگنال سینوسی:**

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

دامنه سیگنال (A_m)، فرکانس زاویه ای (ω)، فاز (φ)

❑ نمایش یک شکل موج سینوسی، به صورت کلی $A_m \cos(\omega t+\varphi)$ است که در آن دامنه A_m دامنه، ω فرکانس زاویه ای و φ فاز سینوسی خوانده می شود. نمایش سیگنال سینوسی به صورت عدد مختلط به صورت خواهد بود:

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$$

یادآوری : $e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha \longrightarrow x(t) = \mathrm{Re}[A_m e^{j(\omega t+\varphi)}] = \mathrm{Re}[A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}]$

با دانستن عدد مختلط $A=A_m e^{j\varphi}$ اندازه و زاویه فاز را داریم. عدد مختلط A را **فیزور سیگنال سینوسی** گویند. پس با داشتن ω می توان هر سیگنال سینوسی را با فیزور آن که یک عدد مختلط است، نمایش داد. داشتن فیزور یک سیگنال سینوسی به تنهایی، فقط مقادیر اندازه و زاویه فاز آن را مشخص می کند و اطلاعی از فرکانس ω بدست نمی دهد.

✓ **فیزور دوار:** عدد مختلط $Ae^{j\omega t}$ را **فیزور دوار** گویند. این عدد در هر لحظه، نقطه ای را نشان می دهد که با سرعت زاویه ای ω روی دایره به شعاع A و در خلاف جهت عقربه های ساعت دوران می کند.

❑ **مثال)** فیزور سیگنال مقابل را به دست آورید: $x(t) = B_m \sin(\omega t + \varphi)$

■ **حل)**

$$x(t) = B_m \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) = \mathrm{Re}[B_m e^{j\varphi} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t}] \longrightarrow B = B_m e^{j\varphi} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jB_m e^{j\varphi}$$

توجه شود که اگر سیگنال سینوسی را به صورت زیر مشخص کنیم:

$$y(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

می توان آن را به صورت $y(t) = \mathrm{Im}[Ae^{j\omega t}]$ نوشت که در آن

$$A = A_m e^{j\varphi}$$

بنابر این اگر سیگنال ما سینوسی باشد، فیزور را در $-j$ ضرب کرده و از اپراتور Re استفاده می کنیم.

****

❑ **روش فیزوری:** روش تحلیلی که در آن، به جای سیگنال های سینوسی، فیزور آن ها را قرار داده و با انجام عملیات مختلط، فیزور سیگنال خروجی مطلوب را بدست می آوریم، روش تحلیل فیزوری نام دارد.

❖ **نکات مهم برای کار با فیزورها:**

۱- اپراتور $\mathrm{Re}[\ldots]$ جمع پذیر و همگن است (خطی)، یعنی:

جمع پذیری: $\mathrm{Re}[z_1(t) + z_2(t)] = \mathrm{Re}[z_1(t)] + \mathrm{Re}[z_2(t)]$

همگنی : (α حقیقی) $\mathrm{Re}[\alpha z_1(t)] = \alpha \mathrm{Re}[z_1(t)]$

در واقع، برای تمام مقادیر α_1 و α_2 حقیقی و کمیت های مختلط z_1 و z_2:

$$\mathrm{Re}[\alpha_1 z_1(t) + \alpha_2 z_2(t)] = \alpha_1 \mathrm{Re}[z_1(t)] + \alpha_2 \mathrm{Re}[z_2(t)]$$

که با به کار بردن نمایش مختصات قائم برای $z_1(t)$ و $z_2(t)$ اثبات می شود.

۲- اگر A عدد مختلطی با نمایش قطبی به صورت $A = A_m e^{j\varphi}$ باشد، آنگاه:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[Ae^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}Ae^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[j\omega Ae^{j\omega t}\right]$$

یعنی عملیات گرفتن جزء حقیقی و مشتق گیری جابجایی پذیرند.

اعمال $\frac{d}{dt}$ به $Ae^{j\omega t}$ به منزله ضرب کردن $Ae^{j\omega t}$ در $j\omega$ است.

۳- فرض کنید A و B اعداد مختلط و ω یک فرکانس زاویه ای باشد. در این صورت

$$\forall t \quad \mathrm{Re}[Ae^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[Be^{j\omega t}] \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

۴- مجموع جبری هر تعداد سیگنال سینوسی با فرکانس زاویه ای یکسان ω و هر تعداد مشتقات آنها از هر مرتبه، یک سیگنال سینوسی با همان فرکانس زاویه ای ω است.

❑ **مثال)** اگر داشته باشیم $x_1(t) = 20Cos(\omega t - 25)$,$x_2(t) = 30Cos(\omega t + 50)$

مجموع $x_1(t) + x_2(t)$ را به صورت یک سینوسی بنویسید.

■ **حل)**

$$x_1(t) = Re[20e^{-j25}e^{j\omega t}]\,, x_2(t) = Re[30e^{j50}e^{j\omega t}]$$

$$x_1(t) + x_2(t) = Re[(20e^{-j25} + 30e^{j50})e^{j\omega t}] = Re[(37.413 + j14.529)e^{j\omega t}]$$

$$= Re\left[40.135e^{j21.22}.\,e^{j\omega t}\right] = 40.135Cos(\omega t + 21.22)$$

****

❑ **مثال)** عبارت $x(t) = aCos\omega t + bSin\omega t$ را به صورت یک سینوسی با فرکانس ω بنویسید.

■ **حل)**

$$x(t) = Re\left[ae^{j\omega t}\right] + Re\left[-jbe^{j\omega t}\right] = Re\left[(a - jb)e^{j\omega t}\right]$$

$$= Re\left[\sqrt{a^2 + b^2}e^{-jtan^{-1}\frac{b}{a}}.\,e^{j\omega t}\right]$$

$$\Longrightarrow x(t) = \sqrt{a^2 + b^2}Cos\left(\omega t - tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

****

❖ **نتیجه:** اگر سیگنال سینوسی ω دارای فیزور $a \pm jb$ باشد، شکل آن به صورت زیر خواهد بود.

$$acos\omega t \mp bsin\omega t$$

❑ **نحوه حل معادلات دیفرانسیل با فیزور:** روش فیزوری، ساده ترین راه برای محاسبه جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب حقیقی است، وقتی که **ورودی سینوسی** باشد.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = b_0 \frac{d^m w}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m w$$

$$w(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}[A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}]$$

$$y_p(t) = B_m \cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}[B_m e^{j\theta} e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[B e^{j\omega t}]$$

شکل جواب خصوصی را به صورت مقابل در نظر گرفته و در معادله قرار می دهیم:

$$\mathrm{Re}[(B(j\omega)^n + a_1 B(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_n B)e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[(b_o A(j\omega)^m + \cdots + b_m A)e^{j\omega t}]$$

$$\Rightarrow B = \frac{b_o(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_m}{(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_n} A$$

✓ **نکته ۱:** مخرج، همان معادله مشخصه است که $j\omega$ بجای S قرار گرفته است.

✓ **نکته ۲:** اگر $j\omega$ ریشه معادله مشخصه باشد، در آن صورت شکل پاسخ خصوصی به صورت زیر لحاظ می شود:

$$\boldsymbol{y_p(t) = tB_m \cos(\omega t + \theta)}$$

در این شرایط که $j\omega$ ریشه معادله مشخصه باشد، با توجه به این که $j\omega$ یک فرکانس طبیعی است، دیگر مدار به صورت فیزوری قابل محاسبه نخواهد بود.

❑ **مثال)** جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 2\frac{dw}{dt} + w$ برای ورودی زیر را تعیین کنید.

$$w(t) = 5Cos(2t + 25)$$

■ **حل)**

اگر فیزور جواب خصوصی $y = Re[Be^{j2t}]$ فرض شود، داریم:

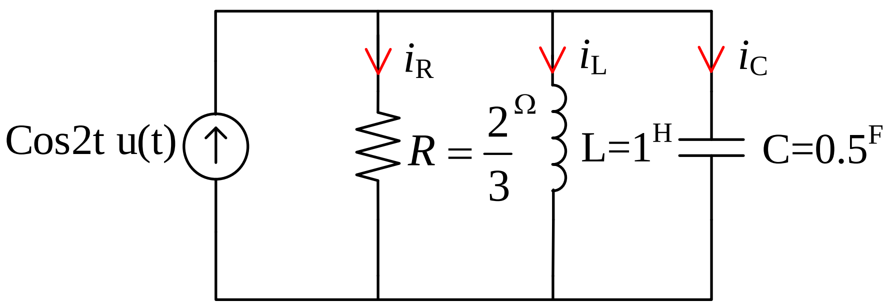
$$[(j2)^2+3(j2) + 2]B = [2(j2) + 1]5e^{j25}$$

$$B = \frac{5(1 + j4)e^{j}25}{-2 + j6} = 3.259e^{-j7471}$$

بنابراین جواب خصوصی به صورت $3.259Cos(2t - 7.471)$ است.

****

❑ **مثال)** پاسخ کامل متغیر i_L را در مدار مقابل تعیین کنید.



$$V_C(0^-) = 2^{\,V},\ i_L(0^-) = 1^{\,A}$$

■ **حل)**

$$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = i_s(t)$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{L} = 2$$

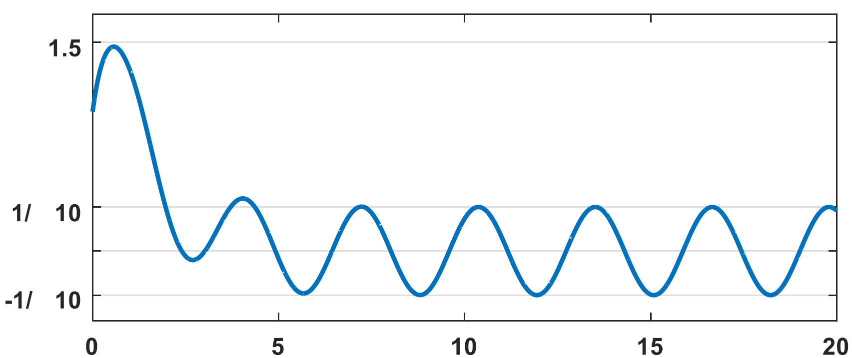
$$\frac{1}{2}\frac{d^2 i_L}{dt^2}+\frac{3}{2}\frac{di_L}{dt}+i_L=\cos 2t\cdot u(t)\quad \rightarrow i_L(t)=i_h+i_p$$

$$\frac{1}{2}S^2+\frac{3}{2}S+1=0\ \rightarrow S=-1\,,\ -2\qquad \rightarrow i_h=k_1e^{-t}\ +k_2e^{-2t}$$

$$i_p=B_m\cos(2t+\theta)$$

$$\Rightarrow B=\frac{1}{\frac{1}{2}(j2)^2+\frac{3}{2}(j2)+1}\times 1=\frac{1}{-1+3j}=\frac{1}{\sqrt{10}}e^{-j\tan^{-1}(\frac{3}{-1})}=\frac{1}{\sqrt{10}}e^{-j108^\circ}$$

$$\Rightarrow\ i_L(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{-2t}+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos(2t-108^\circ)$$



ضرایب k_1 و k_2 از روی شرایط اولیه تعیین می شوند.

$$i_L(0^+)=1$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+)=2$$

$$\Rightarrow i_L(t)=3.6e^{-t}-2.5e^{-2t}+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos(2t-108^\circ)$$

تبصره: در بعضی مدارها می توان شرایط اولیه را به نحوی تعیین کرد که حالت گذرا متحد با صفر شود.

۴–۲– تحلیل یک مدار در حالت دائم سینوسی (پاسخ حالت دائمی با ورودی سینوسی)

❑ برای حل یک مدار با ورودی سینوسی در حالت دائمی با یک ورودی سینوسی، مدار با را استفاده از **روش فیزوری** تحلیل می کنیم. در همین راستا باید به نکات زیر توجه شود:

1) اگر مدار داده شده **پایدار** باشد (یعنی تمامی فرکانس های طبیعی آن در **نیم صفحه چپ** باشند) **پاسخ همگن آن برای** $t \Longrightarrow \infty$ **همواره به صفر میل خواهد کرد و بنابراین جواب حالت دائمی همان پاسخ خصوصی می باشد**. پس، **در مدارهای پایدار با ورودی سینوسی، پاسخ حالت دائمی، همان پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل مربوطه است.**

2) شرایط اولیه فقط در تعیین ثابت های k_1 و k_2 و ... نقش دارند و وقتی پاسخ حالت دائمی مطرح می شود، کل پاسخ همگن به سوی صفر می رود و اثر شرایط اولیه از بین خواهد رفت. یعنی **در تعیین پاسخ حالت دائمی سینوسی، شرایط اولیه موجود در مدار نقشی را ایفا نمی کند.**

3) اگر یک یا چند فرکانس طبیعی مدار در **نیم صفحه راست** باشد مدار **ناپایدار** می شود و بنابراین **پاسخ حالت دائمی سینوسی وجود نخواهد داشت.**

4) اگر **فرکانس سینوسی ورودی، جزء یکی از فرکانس های طبیعی مدار باشد،** پاسخ خصوصی به صورت $\mathrm{k}t Cos(\omega t+\varphi)$ خواهد بود که برای $t \Longrightarrow \infty$ به سوی بی نهایت می رود. **بنابراین پاسخ حالت سینوسی وجود نخواهد داشت.**

5) اگر مدار دارای **یک جفت فرکانس طبیعی روی محورjω باشد که فرکانس آن با فرکانس سیگنال ورودی متفاوت باشد،** پاسخ حالت دائمی به صورت مجموع دو سینوسی با فرکانس های مختلف خواهد بود. **یعنی مدار پاسخ حالت دائمی دارد، لکن این پاسخ سینوسی نمی باشد.**

6) اگر مدار دارای **فرکانس های طبیعی مکرر روی محور jω باشد،** پاسخ همگن دارای جمله ای به صورت $\mathrm{k}t Cos(\omega t+\varphi)$ بوده و بنابراین **مدار ناپایدار است و پاسخ حالت دائمی وجود نخواهد داشت.**

7) **پاسخ حالت دائمی سینوسی** اگر وجود داشته باشد، همواره **همان فرکانس سیگنال ورودی** را خواهد داشت و **روش فیزوری، مناسب ترین روش محاسبه پاسخ حالت دائمی سینوسی است.**

❖ **نکته:** در مدارهای خطی تغییرپذیر با زمان و یا مدار های غیرخطی، پاسخ حالت دائمی به یک ورودی سینوسی (اگر وجود داشته باشد) معمولاً سینوسی نخواهد بود. این پاسخ ممکن است شامل چند سینوسی باشد و یا حتی سینوسی هایی داشته باشد که فرکانس آن، کسری از فرکانس ورودی باشد. در مدار های غیرخطی، ممکن است هارمونیکها $(\mathrm{n}\omega)$ و زیرهارمونیکها $\left(\frac{\omega}{n}\right)$ در پاسخ ظاهر شوند.

❑ **سوال (خلاصه مفاهیم صفحه قبل): تحت چه شرایطی پاسخ حالت دایمی سینوسی وجود ندارد؟**

1. یک یا چند ریشه معادله مشخصه در سمت راست صفحه S باشد.

$$y_h(t)=\sum_{i=1}^{n} k_i e^{s_i t} \xrightarrow{t\to\infty} \quad y_h(t)\to\infty$$

2. اگر jω (ω فرکانس زاویه ای منبع ورودی است) یک ریشه معادله مشخصه باشد. در این حالت در پاسخ خصوصی، جمله $B_m t\cos(\omega t+\theta)$ ظاهر می شود و خروجی ناپایدار خواهد بود:

$$t\to\infty: \quad y_P(t)\to\infty$$

3. معادله مشخصه دارای ریشه های مکرر روی محور jω باشد.

$$(s^2+\omega_o{}^2)^2 \to S_{1,2}=j\omega_o\,,\ S_{3,4}=-j\omega_o$$

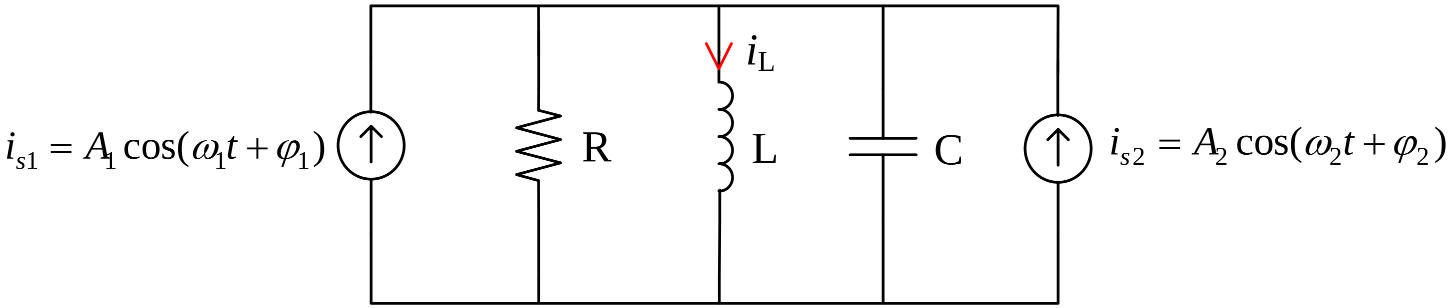
$$y_h(t)=k_1\cos(\omega_o t+\varphi_1)+k_2 t\cos(\omega_o t+\varphi_2)+\cdots \xrightarrow{t\to\infty} \quad y_h(t)\to\infty$$

4. برخی ریشه های معادله مشخصه روی محور jω باشند و فرکانس زاویه ای متناظر، متفاوت از فرکانس منبع ورودی باشد. در این حالت، پاسخ حالت دائمی وجود دارد ولی دیگر سینوسی نمی باشد.

$$y(t)=\left(\sum k_i e^{s_i t}+A_m\cos(\omega_o t+\varphi)\right)+B_m cos(\omega t+\theta)$$

❖ **نکته (جمع آثار در حالت دائم سینوسی):** توجه شود که اگر دو ورودی سینوسی با فرکانس های مفاوت داشته باشیم، می توان پاسخ حالت دائم را با استفاده از روش جمع آثار در مدار LTI مذکور به دست آورد. برای این کار، اثر هر منبع را جداگانه در نظر گرفته و سپس پاسخ های نهایی را با هم جمع می کنیم. در واقع، پاسخ حالت دائمی، برابر با مجموع دو حالت دائمی سینوسی است که در صورت اعمال هر یک از دو سینوسی ورودی و به طور جداگانه روی مدار به دست می آید. البته پاسخ نهایی چون جمع دو سینوسی است، به صورت سینوسی نخواهد بود.

❑ **مثال)** در مدار LTI و پایدار زیر، پاسخ حالت دایمی i_L را به دست آورید.



■ **حل)**

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = i_{s1}(t) + i_{s2}(t)$$

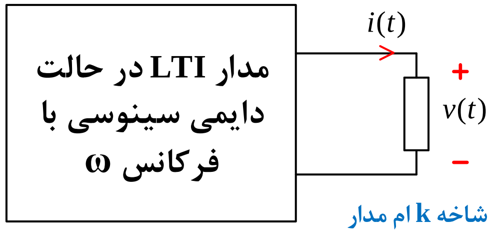
i_{p1}: جواب خصوصی ناشی از i_{s1} $\longrightarrow i_{p1} = \mathrm{Re}[B_1 e^{j\omega_1 t}]$ یا $B_1 = \dfrac{1}{LC(j\omega_1)^2 + \frac{L}{R}(j\omega_1) + 1} \times A_1 e^{j\varphi_1}$

i_{p2}: جواب خصوصی ناشی از i_{s2} $\longrightarrow i_{p2} = \mathrm{Re}[B_2 e^{j\omega_2 t}]$ یا $B_2 = \dfrac{1}{LC(j\omega_2)^2 + \frac{L}{R}(j\omega_2) + 1} \times A_2 e^{j\varphi_2}$

$$i_p(t) = i_{p1} + i_{p2} = |B_1|\cos(\omega_1 t + \angle B_1) + |B_2|\cos(\omega_2 t + \angle B_2)$$

****

❑ **مفاهیم امپدانس و ادمیتانس:** پاسخ حلت دائمی سینوسی را می توان با نمایش فیزوری سینوسی به دست آورد. در تعیین پاسخ حالت دائمی سینوسی، به جای حل یک معادله دیفرانسیل، یک معادله جبری را حل کردیم. به جای جمع و تفریق یا مشتق گیری سینوسی ها، اعدد مختلط نمایش دهنده آنها را جمع و تفریق کردیم. بنابراین، برای تعیین پاسخ حالت دائمی سینوسی، نیازی به نوشتن معادلات دیفرانسیل نیست و می توان معادلات جبری خطی بر حسب فیزورها نوشت. اگر مداری در حالت دائمی سینوسی قرار گیرد، ولتاژ و جریان تمام شاخه‌ها آن، از نوع سینوسی با فرکانس ω بوده و باید فیزور آن ها را تعیین نمود. سوالی مهم این است که میان فیزور ولتاژ و فیزور جریان المان های اصلی مدار یعنی مقاومت، خازن و سلف چه رابطه‌ای برقرار است.



فرض کنید مدار مقابل در حالت دایمی سینوسی باشد. برای شاخه kام می توان نوشت:

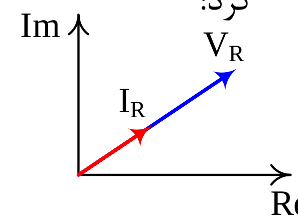
$$i(t) = \mathrm{Re}[Ie^{j\omega t}] = |I|\cos(\omega t + \angle I)$$

$$v(t) = \mathrm{Re}[Ve^{j\omega t}] = |V|\cos(\omega t + \angle V)$$

بنابراین، روابط ولتاژ و جریان برای این شاخه را (اگر یکی از سه المان مقاومت، خازن و یا سلف باشد) می توان به صورت های زیر بیان کرد:

مقاومت : $v(t) = Ri(t) \rightarrow \mathrm{Re}[Ve^{j\omega t}] = R\mathrm{Re}[Ie^{j\omega t}] \longrightarrow V = RI \longrightarrow |V| = R|I|$

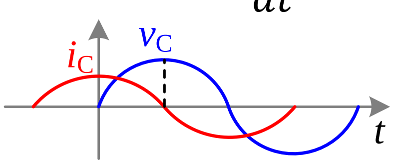
$\longrightarrow \angle V = \angle I$

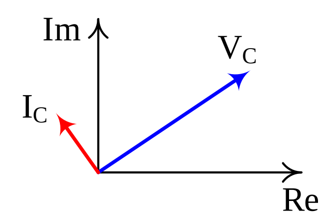


✓ **فاز V با زاویه فاز I یکسان است (هم فاز).**

خازن : $i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} \rightarrow \mathrm{Re}[I_C e^{j\omega t}] = C\dfrac{d}{dt}\mathrm{Re}[V_C e^{j\omega t}] \longrightarrow I_C = j\omega C V_C$

$\longrightarrow \angle I_C = \angle V_C + 90°$

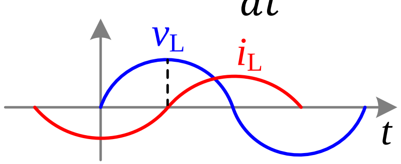


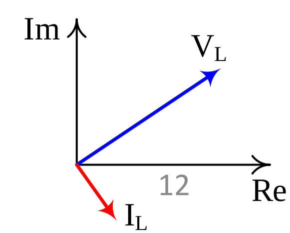


✓ **فاز جریان خازن نسبت به ولتاژ خازن، ۹۰ درجه پیش فاز است.**

سلف : $v_L = L\dfrac{di_L}{dt} \rightarrow \mathrm{Re}[V_L e^{j\omega t}] = L\dfrac{d}{dt}\mathrm{Re}[I_L e^{j\omega t}] \longrightarrow V_L = j\omega L I_L$

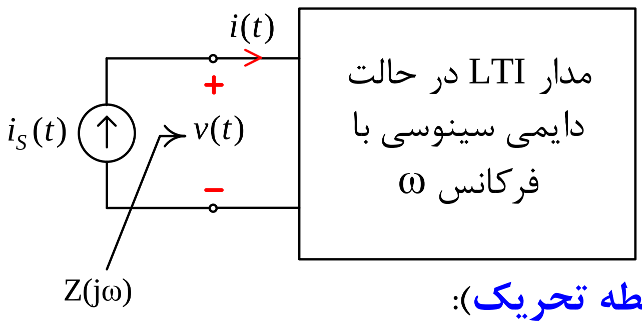
$\longrightarrow \angle I_L = \angle V_L - 90°$





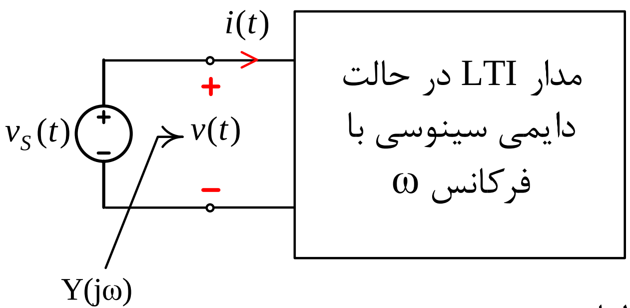
✓ **فاز جریان سلف نسبت به ولتاژ سلف، ۹۰ درجه پس فاز است.**

❖ تعریف **امپدانس** دیده شده از سرهای مورد نظر تک قطبی (**امپدانس نقطه تحریک**):



$$\left.\begin{aligned} i &= \mathrm{Re}[Ie^{j\omega t}] \\ v &= \mathrm{Re}[Ve^{j\omega t}] \end{aligned}\right\} \quad Z(j\omega) \triangleq \frac{V}{I_S}$$

❖ تعریف **ادمیتانس** دیده شده از سرهای مورد نظر تک قطبی (**ادمیتانس نقطه تحریک**):



$$\left.\begin{aligned} i &= \mathrm{Re}[Ie^{j\omega t}] \\ v &= \mathrm{Re}[Ve^{j\omega t}] \end{aligned}\right\} \quad Y(j\omega) \triangleq \frac{I}{V_S}$$

✓ اگر منبع ولتاژ طوری تنظیم شود که فیزور ولتاژ منبع V_s، برابر با فیزور ولتاژ دو سر منبع جریان باشد، می توان انتظار داشت که فیزور جریان آن نیز برابر با فیزور جریان منبع I_s باشد. پس طبق **قضیه جانشینی** در مدار اثبات می شود که:

$$Y(j\omega) \triangleq \frac{1}{Z(j\omega)}$$

✓ در مورد امپدانس معادل مقاومت، خازن و سلف داریم:

$$Z_R = R\ ,\quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}\ ,\quad Z_L = j\omega L$$

✓ در مورد ادمیتانس معادل مقاومت، خازن و سلف داریم:

$$Y_R = \frac{1}{R}\ ,\quad Y_C = j\omega C\ ,\quad Y_L = \frac{1}{j\omega L}$$

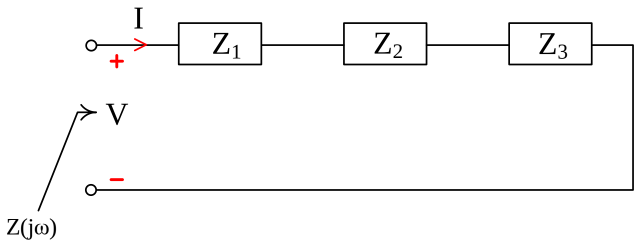
❖ مهم: **بنابر روابط بالا مشخص شد که امپدانس و ادمیتانس، تابعی از فرکانس زاویه ای بوده و روابط جبری مختلط (بدون مشتق و انتگرال) را بین فیزورهای ولتاژ و جریان المان LTI ایجاد می کنند. مشتق با ضرب در $j\omega$، و انتگرال با تقسیم بر $j\omega$ جایگزین می شود.**

❑ **سوال:** آیا قوانین کیرشهف را می توان در حالت دائمی سینوسی بر حسب فیزورها نوشت.

$$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 0$$

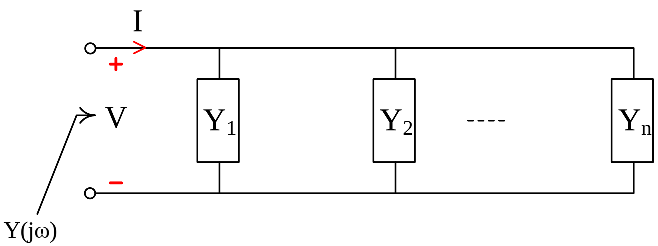
$$Re[V_1 e^{j\omega t} + V_2 e^{j\omega t} + V_3 e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[(V_1 + V_2 + V_3)e^{j\omega t}] = 0 \longrightarrow V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

❖ بهم پیوستن سری یا موازی:



$$KVL: V = V_1 + V_2 + V_3$$
$$KCL: \ I = I_1 = I_2 = I_3$$

$$ZI = Z_1 I + Z_2 I + Z_3 I$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$$



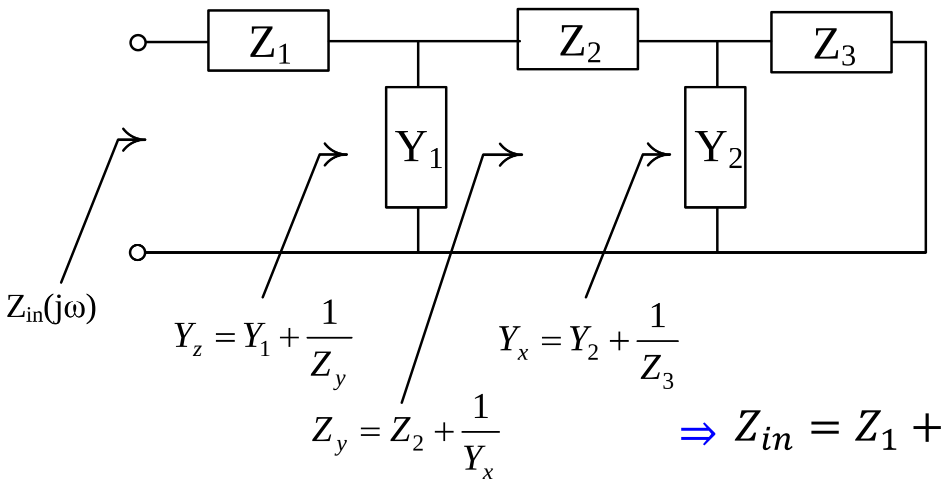
$$KCL: \ I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$
$$KVL: \ V = V_1 = V_2 = \cdots = V_n$$

$$YV = Y_1 V + Y_2 V + \cdots + Y_n V$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

❖ **نتیجه مهم: در اتصال سری، امپدانس ها جمع می شوند و در اتصال موازی، ادمیتانس ها جمع می شوند. بنابراین می توان در تحلیل حالت دائم سینوسی، با استفاده از تبدیل مقادیر المان های پسیو به امپدانس و ادمیتانس، مقادیر آن ها را در فرکانس مورد نظر به دست آورد و مشخصه های امپدانسی و ادمیتانسی شبکه را به صورت رفتار در فرکانس مورد نظر نشان داد (مانند ولتاژ/جریان گره ها یا شاخه ها، و یا امپدانس/ادمیتانس دیده شده از یک سر مشخص در مدار). در ادامه چند مثال در این خصوص ارائه می شود.**

❑ **مثال)** امپدانس ورودی مدار مقابل را از سرهای نشان داده شده به دست آورید.

■ **حل)**



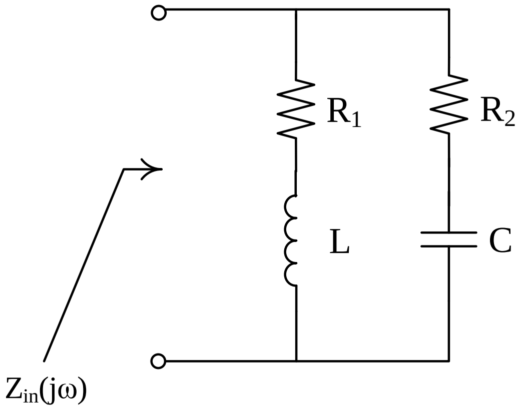
$$Z_{in} = Z_1 + \frac{1}{Y_z} \Rightarrow Z_{in} = Z_1 + \frac{1}{Y_1 + \frac{1}{Z_y}}$$

$$\Rightarrow Z_{in} = Z_1 + \frac{1}{Y_1 + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{Y_x}}} \Rightarrow Z_{in} = Z_1 + \frac{1}{Y_1 + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3}}}}$$

****

❑ **مثال)** امپدانس ورودی مدار مقابل را از سرهای نشان داده شده به دست آورید. به ازای R_1، R_2، L و C برابر با یک واحد، امپدانس چقدر است.

■ **حل)**

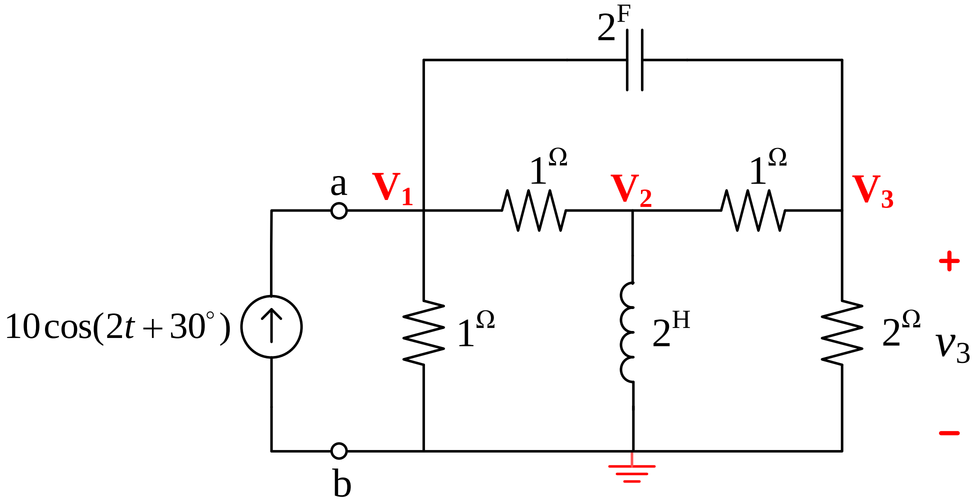


$$Y_{in} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \Rightarrow Z_{in} = \frac{1}{Y_{in}}$$

$$if\ \ R_1, R_2, L, C = 1 \ \rightarrow Y_{in} = \frac{1}{1 + j\omega} + \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega}} = 1$$

یعنی امپدانس ورودی، مستقل از فرکانس می شود.

****



❑ **مثال)** در مدار روبرو، V_3 را در حالت دایمی سینوسی پیدا کنید. سپس امپدانس دیده شده از سرهای a و b را در فرکانس ω=2 به دست آورید.

■ **حل)**

KCL در گره ۱ : $V_1 + (V_1 - V_2) + j\omega C(V_1 - V_3) - I_S = 0 \Rightarrow V_1 + (V_1 - V_2) + j4(V_1 - V_3) - 10\angle 30 = 0$

KCL در گره ۲ : $(V_2 - V_1) + (V_2 - V_3) + \dfrac{V_2}{j\omega L} = 0 \Rightarrow (V_2 - V_1) + (V_2 - V_3) + \dfrac{V_2}{j4} = 0$

KCL در گره ۳ : $\dfrac{V_3}{2} + (V_3 - V_2) + j4(V_3 - V_1) = 0$

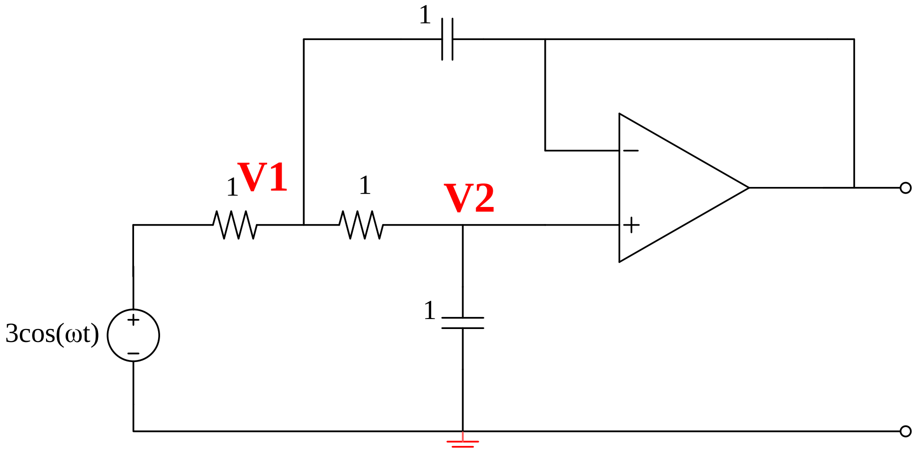
$$\begin{bmatrix} 2+j4 & -1 & -j4 \\ -1 & 2-\dfrac{j}{4} & -1 \\ -j4 & -1 & \dfrac{3}{2}+j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_3 = 6.46\angle 44^\circ \quad \Rightarrow v_3 = 6.46\cos(2t + 44^\circ)$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{in} &= \frac{V_1}{I_S} \\ V_1 &= 6.42\angle 36^\circ \end{aligned}\right\} \quad Z_{in} = \frac{6.42\angle 36^\circ}{10\angle 30} = 0.642\angle 6^\circ \quad or \quad 0.642e^{j6^\circ}$$

بدیهی است که اگر محاسبه مورد نظر در فرکانس دیگری بود، باید محاسبات مجدد انجام شود.

****

❑ **مثال)** با تحلیل گره، ولتاژ گره خروجی آپ امپ را در حالت دایمی سینوسی پیدا کنید.



■ **حل)**

فیدبک منفی مستقیم آپ امپ برقرار است. لذا ولتاژ گره منفی، گره مثبت و خروجی یکسان است.

KCL در گره ۱ : $(V_1 - 3) + (V_1 - V_o) + j\omega(V_1 - V_o) = 0$

KCL در گره ۲ : $(V_o - V_1) + j\omega V_o = 0$

$$V_o = \frac{3}{1 - \omega^2 + j2\omega} \rightarrow v_o(t) = |V_o|\cos(\omega t + \angle V_o)$$

$$if\ \ \omega = 1\ \ \rightarrow v_o = 1.5cos(t - 90°)$$

$$if\ \ \omega = 10\ \ \rightarrow v_o = 0.297cos(10t + 168.3°)$$

$$if\ \omega = 100\ \ \rightarrow v_o = 0.3 \times 10^{-3}cos(100t + \theta)$$

همانطور که مشاهده می شود، با افزایش فرکانس ورودی، دامنه خروجی کمتر می شود. به عبارت دیگر، خروجی بیشتر تضعیف می شود. چنین مداری خاصیت فیلتری **پایین گذر** دارد.

اگر مدار، فرکانس های بالا و پایین را بیشتر تضعیف کرده و فرکانس های میانی را کمتر تضعیف کند، خاصیت فیلتری **میان گذر** دارد.

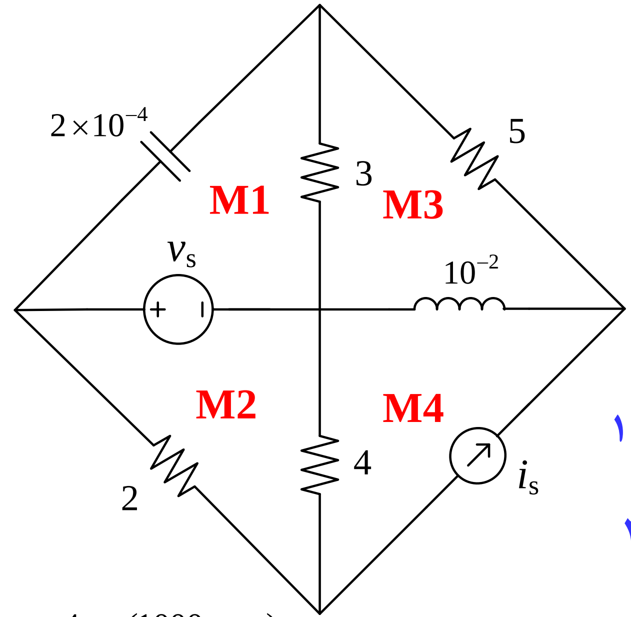
اگر فرکانس های پایین بیشتر تضعیف شده و فرکانس های بالا کمتر تضعیف شوند، مدار خاصیت فیلتری **بالاگذر** خواهد داشت.

اگر فرکانس های میانی بیشتر از فرکانس های بالایی و پایینی تضعیف شوند، مدار مذکور خاصیت فیلتری **میان نگذر** خواهد داشت.

❖ **رفتار فیلتری، به محل اعمال ورودی و نیز محل مشاهده خروجی وابسته است.**

****

❑ **مثال)** با کمک روش تحلیل مش، مدار مقابل را حل کنید و جریان مش ها را به دست آورید.



$v_s = 4\cos(1000t+\pi)$

$i_s = \sqrt{2}\sin(1000t+\frac{\pi}{4})$

■ **حل)**

KVL در مش ۱ : $-4e^{j\pi} + \dfrac{1}{j0.2}I_2 + 3(I_2 - I_3) = 0$

KVL در مش ۲ : $4e^{j\pi} + 4(I_1 - I_4) + 2I_1 = 0$

KVL در مش ۳ : $5I_3 + j10(I_3 - I_4) + 3(I_3 - I_2) = 0$

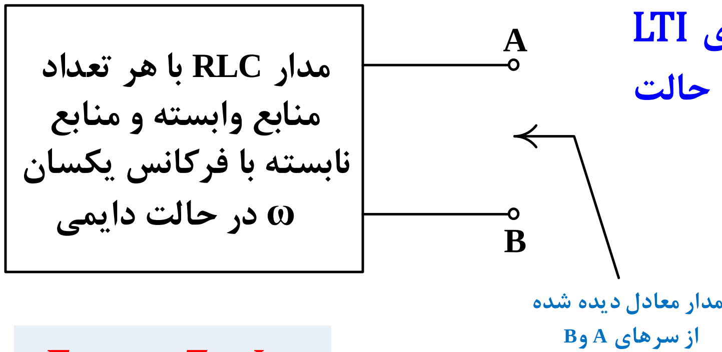
رابطه مش ۴: $I_4 = -I_s = -(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \times -j) = -(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}) \times -j)$

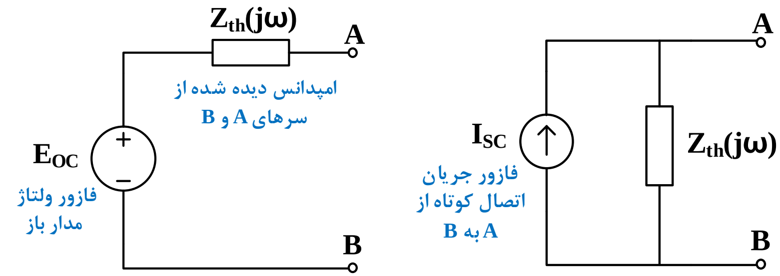
$$= \sqrt{2}j(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + j$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= 0.667e^{j90^\circ} \\ I_2 &= 1.42e^{-j122.8^\circ} \\ I_3 &= 1.43e^{j176.5^\circ} \\ I_4 &= \sqrt{2}e^{j135^\circ} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} i_1 &= 0.667\cos(1000t + 90^\circ) \\ i_2 &= 1.42\cos(1000t - 122.8^\circ) \\ i_3 &= 1.43\cos(1000t + 176.5^\circ) \\ i_4 &= \sqrt{2}\cos(1000t + 135^\circ) \end{aligned}$$

****

❖ توجه مهم: مفاهیم مربوط به مدارهای معادل تونن و نورتن در مدارهای LTI مقاومتی، به صورت کامل برای مدارهای LTI از مرتبه های مختلف در حالت دائم سینوسی و در فرکانس عملکردی مشخص، برقرار می باشد.





مدار معادل تونن

مدار معادل نرتن

$$E_{OC} = Z_{th} I_{SC}$$

- Z_{th} امپدانس دیده شده از سرهای A و B در فرکانس مشخص ω است.
- V_{th} فیزور ولتاژ مداریاز دیده شده از سرهای A و B در فرکانس ω است.
- I_{sc} فیزور جریان اتصال کوتاه از سرهای A و B در فرکانس ω است.

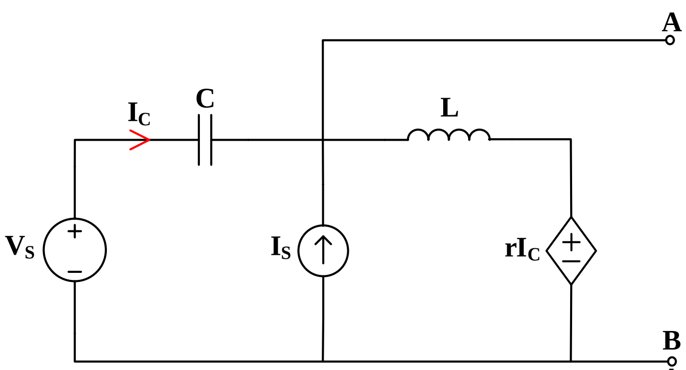
❑ **مثال)** مطلوبست تعیین E_{OC} و I_{SC} برای مدار مقابل در حالت دائمی سینوسی.

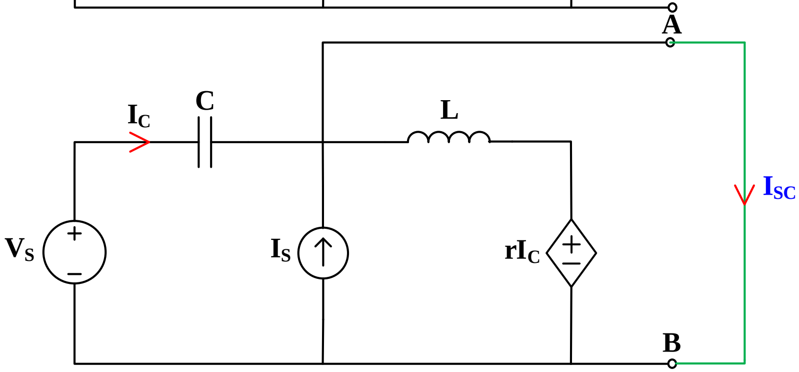
■ **حل)**

معادله حلقه در مش بیرونی را می نویسیم : $V_S = \frac{1}{j\omega C} I_C + j\omega L(I_C + I_S) + rI_C$

$$\Rightarrow I_C = \frac{V_S - j\omega L I_S}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + r}$$

$$\Rightarrow E_{OC} = V_S - \frac{1}{j\omega C} I_C = V_S - \frac{1}{j\omega C}\frac{V_S - j\omega L I_S}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + r}$$



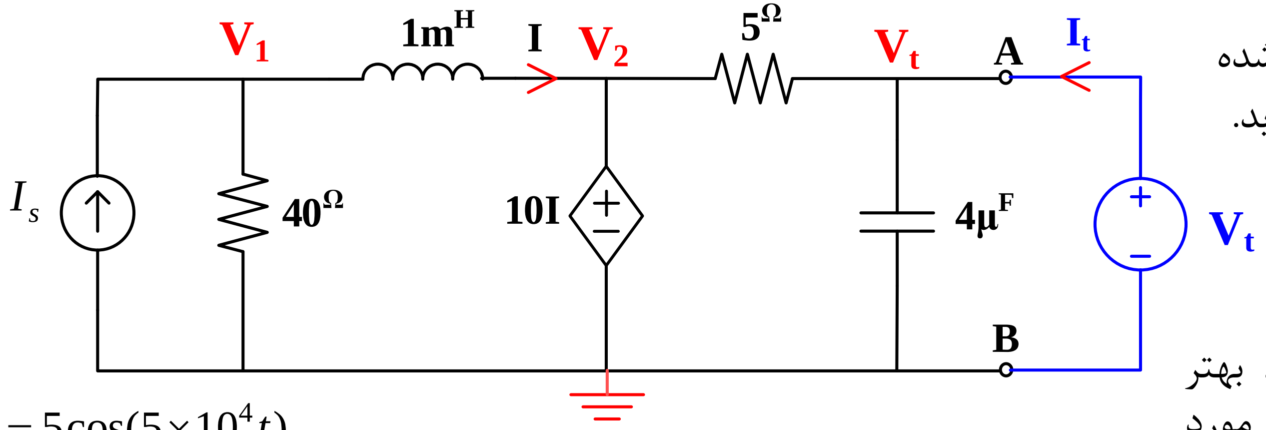


برای تعیین I_{SC} سرهای A و B را اتصال کوتاه می کنیم.

$$I_{SC} = j\omega C V_S + I_S + \frac{r j\omega C V_S}{j\omega L}$$

****

❑ **مثال)** مدار معادل تونن دیده شده از سرهای A و B را به دست آورید.



$I_s = 5\cos(5\times10^4 t)$

■ **حل:**

برای محاسبه همزمان E_{OC} و Z_{th} بهتر است که منبع تستی را به سرهای مورد نظر وصل کنیم. برای تحلیل، روش گره را به کار می بریم.

KCL در گره ۱ : $$\frac{V_1}{40} + \frac{(V_1 - V_2)}{j50} - 5 = 0$$

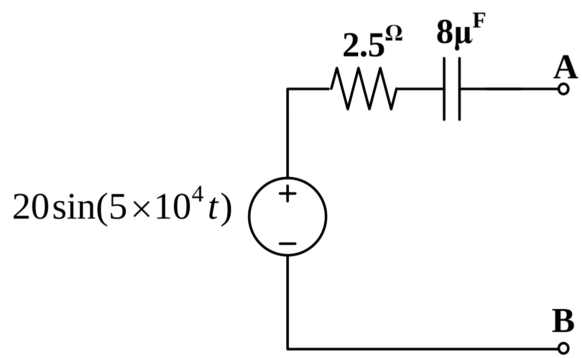
رابطه گره ۲ : $$V_2 = 10I = 10\,\frac{(V_1 - V_2)}{j50}$$

KCL در گره V_t : $$\frac{(V_t - V_2)}{5} + j0.2V_t - I_t = 0$$

$$V_2 = \frac{40}{1+j} = \frac{40(1-j)}{2} = 20(1-j)$$

$$V_t = \frac{5}{1+j} I_t + \frac{1}{1+j} V_2 = \frac{5}{1+j} I_t + \frac{20(1-j)}{1+j}$$

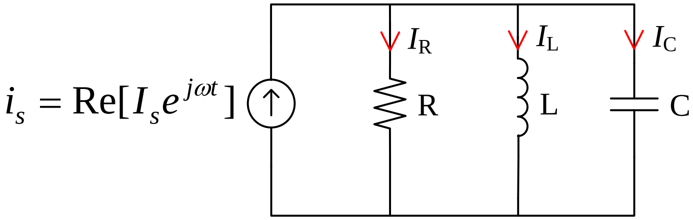
$$\rightarrow E_{OC} = -20j \quad , \quad Z_{th} = \frac{5}{2} - j\,\frac{5}{2}$$



****

۴–۳– مفاهیم مهم در خصوص رفتار مدارها در حوزه فرکانس

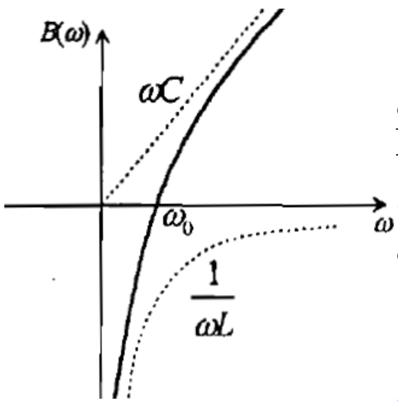
۴–۳–۱– تشدید در مدارهای RLC



❑ **مفهوم تشدید با مثال مدار RLC:** ادمیتانس مدار تک قطبی از دو سر منبع جریان، به صورت زیر می باشد:

$$Y(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$: ادمیتانس دیده شده از دو سر منبع

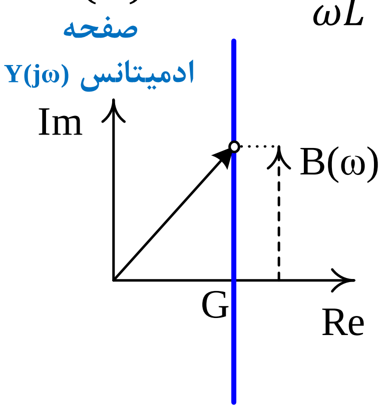
✓ جزء حقیقی ادمیتانس، مقداری ثابت (مستقل از فرکانس) بوده و جزء موهومی تابع فرکانس است. به جزء موهومی ادمیتانس **سوسپتانس** گفته شده و با **B(ω)** نشان داده می شود. جزء حقیقی امپدانس را **کنداکتانس** نامند. اگر نمودار سوسپتانس را برحسب فرکانس زاویه ای ترسیم کنیم، نمودار زیر حاصل می شود.



$$B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

مقدار سوسپتانس در فرکانس ω_0 برابر با صفر است و در این فرکانس، شاخه موازی LC مانند یک مدار باز عمل می کند. این فرکانس را فرکانس تشدید مدار RLC موازی نامند. ملاحظه می شود که اندازه ادمیتانس مدار RLC موازی در فرکانس تشدید حداقل بوده و مدار رفتار مقاومتی دارد. بنابراین **در فرکانس تشدید، بخش LC موازی مانند یک مدار باز رفتار می کند** و تمام جریان منبع از بخش مقاومتی عبور می کند. البته این رفتار مداری، به این معنی نیست که ولتاژ دو سر بخش LC صفر است. بلکه **یک جریان مختلط در بخش LC چرخش می کند.**

❖ **در یک تعریف کلی برای انواع مدارهای با قابلیت تشدید (شامل سلف و خازن)، به فرکانسی که جزء موهومی امپدانس و یا ادمیتانس ورودی برابر با سفر باشد، فرکانس تشدید گویند.**



❖ مکان ادمیتانس: **مکان نقاطی در صفحه ادمیتانس است که با تغییر ω، کلیه مقادیر ممکن Y(jω) را نشان می دهد.** این صفحه در شکل روبرو نشان داده شده است. در مدار RLC موازی، این نمودار به صورت خطی موازی با محور موهومی صفحه ادمیتانس است. فاصله هر نقطه تا مبدأ، برابر با مقدار ادمیتانس در فرکانس مورد نظر است. زاویه محور حقیقی تا محور واصل به نقطه مورد نظر نیز نشان دهنده فاز ادمیتانس در فرکانس مورد نظر می باشد. در مدار RLC موازی، در فرکانس تشدید، اندازه برابر با G و فاز برابر با صفر می باشد.

❑ **صفحه امپدانس:** صفحه ای است که مختصات آن $Re[Y(j\omega)]$ و $Im[Y(j\omega)]$ است. امپدانس دیده شده برای مدار RLC موازی به صورت زیر است:

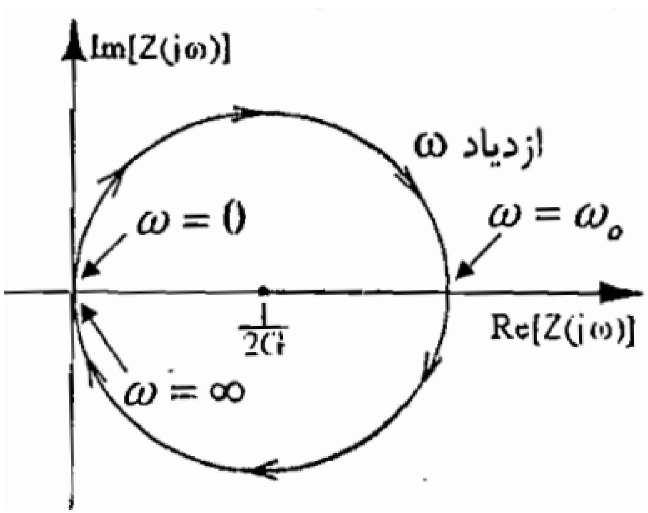
$$Z(j\omega)=\frac{1}{Y(j\omega)}=\frac{1}{G+jB(\omega)}=\frac{G-jB(\omega)}{G^2+B^2(\omega)}\Rightarrow\begin{cases}ReZ(j\omega)=\dfrac{G}{G^2+B^2(\omega)}\\ ImZ(j\omega)=\dfrac{-B(\omega)}{G^2+B^2(\omega)}\end{cases}$$

در واقع اگر امپدانس را از دو سر مذکور ببینیم، به جزء حقیقی امپدانس، **رزیستانس** گفته می شود. به جزء موهومی امپدانس **راکتانس** گفته شده و با $\mathbf{X(\omega)}$ نشان داده می شود. می توان با حذف ω از دو معادله بالا، مکان امپدانس را به صورت زیر بدست آورد:

$$Re^2[Z(j\omega)]+Im^2[Z(j\omega)]=\frac{1}{G^2+B^2(\omega)}=\frac{1}{G}Re[Z(j\omega)]\Rightarrow[Re[Z(j\omega)]-\frac{1}{2G}]^2+Im^2[Z(j\omega)]=(\frac{1}{2G})^2$$

که نتیجه می دهد، مکان امپدانس مدار RLC موازی، یک دایره به مرکز (1/2G,0) و شعاع 1/2G است.

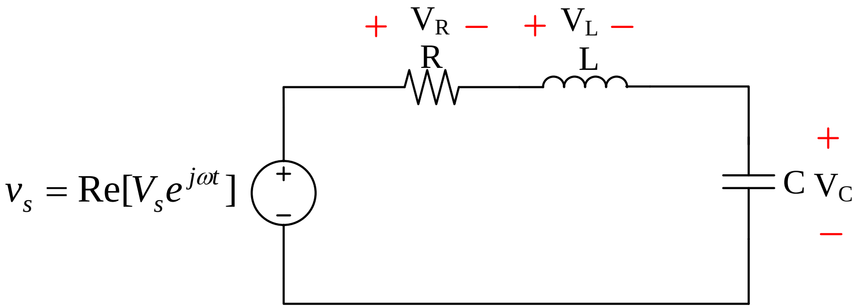
✓ مکان امپدانس: **مکان نقاطی در صفحه امپدانس است که با تغییر ω، کلیه مقادیر ممکن $Z(j\omega)$ را نشان می دهد.**



مقدار فرکانس تشدید $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ بوده و $Z(j\omega_0)$ مقدار حقیقی $R=\frac{1}{G}$ را دارد. در فرکانس تشدید $|Z(j\omega_0)|$ حداکثر می‌شود و زاویه فاز آن صفر می‌شود. در فرکانس تشدید، تمام جریان منبع از مقاومت می‌گذرد و جمع جریان های خازن و سلف صفر است. در فرکانس های پایین، قسمت عمده جریان از سلف می‌گذرد و در فرکانس های بالا، قسمت عمده جریان از خازن می‌گذرد.

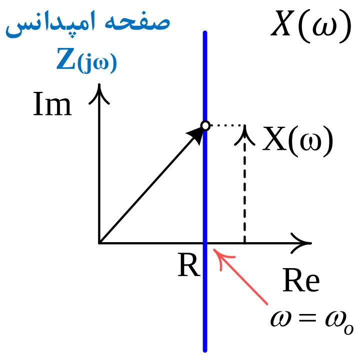
صفحه امپدانس برای مدار RLC موازی

❑ اگر مفهوم تشدید را برای یک مدار **RLC سری** به صورت روبرو بررسی کنیم، به مفاهیم و روابط زیر خواهیم رسید:



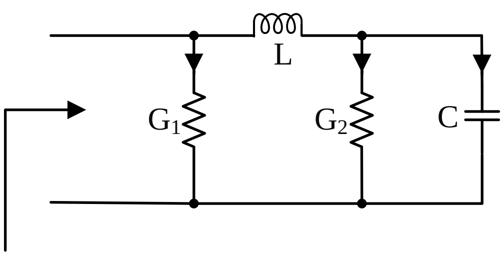
امپدانس دیده شده از دو سر منبع : $Z(j\omega) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

$X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$



اندازه امپدانس مدار RLC سری در فرکانس تشدید، حداقل بوده و معادل R است. بنابراین **در فرکانس تشدید، بخش LC سری مانند یک مدار اتصال کوتاه رفتار می کند.** در فرکانس تشدید، تمام ولتاژ منبع بر روی بخش مقاومتی قرار می گیرد. ضمناً ولتاژ سلف و خازن موهومی محض بوده و همدیگر را خنثی می کنند.

❑ **مثال)** مکان ادمیتانس را برای مدار شکل مقابل تعیین و برای حالت $G_1=1$ و $G_2=2$ و $L=0.5$ و $C=2$ آن را رسم کنید.



■ **حل)**

$$Y(j\omega) = G_1 + \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{G_2 + j\omega C}} = G_1 + \frac{G_2 + j\omega C}{1 - \omega^2 LC + j\omega L G_2}$$

$$\mathrm{Re}[Y(j\omega)] = G_1 + \frac{G_2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2 {G_2}^2}$$

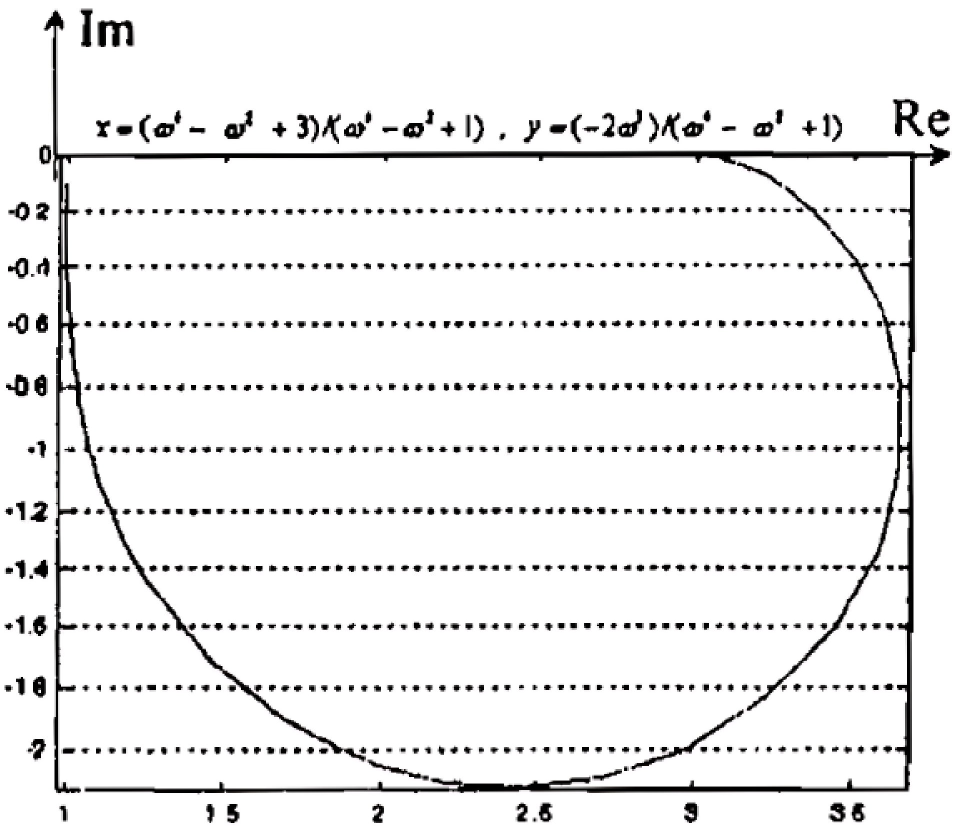
$$\mathrm{Im}[Y(j\omega)] = \frac{\omega[C(1 - \omega^2 LC)^2 - L{G_2}^2]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2 {G_2}^2}$$

معادلات مذکور، روابط پارامتری مکان ادیمتانس است. برای مقادیر عددی داده شده داریم:

$$\mathrm{ReY}(j\omega) = \frac{\omega^4 - \omega^2 + 3}{\omega^4 - \omega^2 + 1}$$

$$\mathrm{ImY}(j\omega) = \frac{-2\omega^3}{\omega^4 - \omega^2 + 1}$$

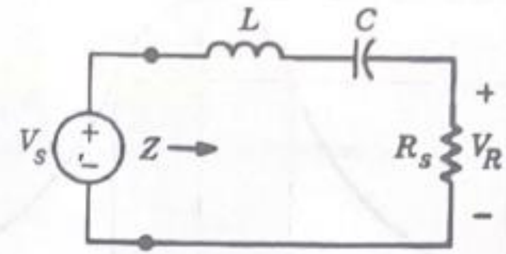
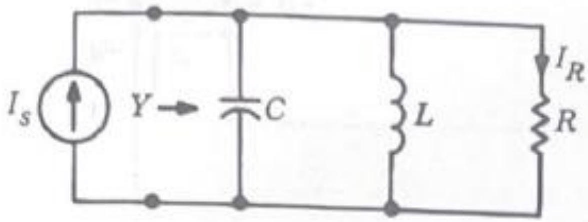
اگر بتوان ω را میان این دو معادله حذف کرد، معادله مکان ادمیتانس به دست می آید. می توان برای ω مقادیر مختلفی در نظر گرفت و این مکان را به صورت ترسیمی رسم کرد.



ω	Re[Y(jω)]	Im[Y(jω)]
0	3	0
0.5	3.46	0.31-
1	3	2-
2	1.54	1.231-
3	1.11	0.74-
4	1.008	0.53-
5	1.003	0.416-
∞	1	0

****

جدول ۷-۱ خواص حالت دایمی سینوسی مدارهای تشدید

مدار تشدید سری	مدار تشدید موازی
 $Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{\sqrt{L/C}}{R_s}$ $\alpha = \frac{R_s}{2L}$ $H(j\omega) \triangleq \frac{V_R}{V_s}; \quad Z(j\omega) = \frac{R_s}{H(j\omega)}$	 $Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$ $\alpha = \frac{1}{2RC}$ $H(j\omega) \triangleq \frac{I_R}{I_s}; \quad Y(j\omega) = \frac{1}{RH(j\omega)}$

$$\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

اگر $Q > \frac{1}{2}$ (حالت میرای ضعیف) فرکانس‌های طبیعی برابر $-\alpha \pm j\omega_d$ هستند که در آنجا:

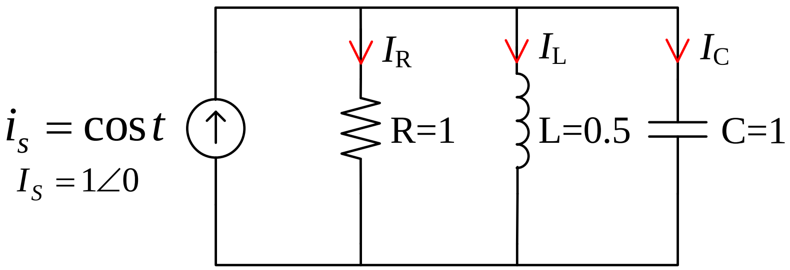
$\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. اگر $Q \gg 1, \omega_d \approx \omega_0$.

$$\begin{cases} \omega_1 \approx \omega_0 - \alpha = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \\ \omega_2 \approx \omega_0 + \alpha = \omega_0\left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \end{cases}$$ فرکانس‌های قطع زاویه 3-db

پهنای باند زاویه‌ای 3-db $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}$ رادیان بر ثانیه

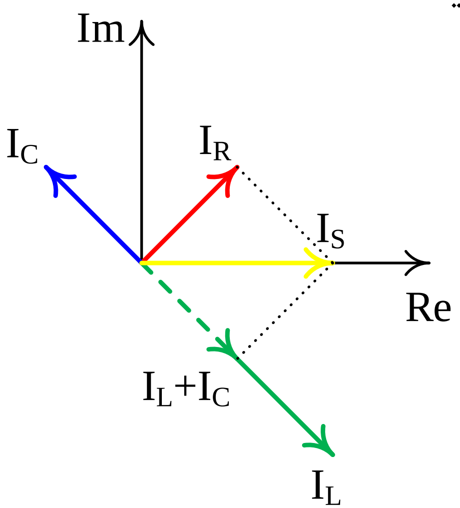
$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q}$ هرتز

۴–۳–۲– دیاگرام فیزوری



❑ **مفهوم دیاگرام فیزوری:** دیاگرامی است که در آن کمیت های فیزوری به شکل بردار نشان داده می شوند. اگر I_G و I_L و I_C فیزورهای جریان های مقاومت، خازن و سلف در مدار RLC موازی و به صورت زیر باشند:

$$I_R = GV\ , I_C = j\omega CV\ , I_L = \frac{1}{j\omega L}V$$



فیزورهای I_s و I_R و I_C و I_L در شکل رسم شده است. چنین شکلی را دیاگرام فیزوری گویند. دیده می‌شود که قانون KCL برای دیاگرام فیزوری برقرار بوده و $I_R + I_C + I_L = I_s$.

$$V = \frac{I_s}{G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{1}{1 + j - 2j} = \frac{1+j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ$$

$$I_R = GV = \frac{1}{1 + j - 2j} = \frac{1+j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle 45^\circ$$

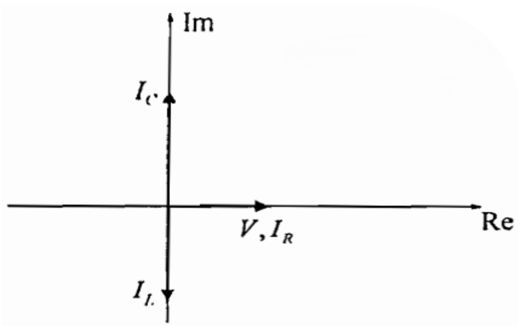
$$I_L = \frac{1}{j\omega L}V = \frac{-2j}{1 + j - 2j} = \frac{-2j(1+j)}{2} = \sqrt{2}\angle -45^\circ$$

$$I_C = j\omega CV = \frac{j}{1 + j - 2j} = \frac{j(1+j)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle 135^\circ$$

اکنون فرض کنید در همان مدار RLC موازی، $i_s(t) = Cos2t = Re[I_s e^{j2t}]$ و مشخص است که فرکانس سیگنال ورودی همان فرکانس تشدید است.

$$Y(j\omega) = 1 + \frac{1}{j2\times\frac{1}{4}} + j2\times 1 = 1\,, \qquad V = Z(j\omega)I_s = 1$$

$$I_R = \frac{V}{R} = 1, \quad I_C = j\omega CV = j2 = 2e^{j90°}, \quad I_L = \frac{V}{j\omega L} = \frac{2}{j} = -j2 = 2e^{-j90°}$$



دیده می‌شود که:

$$I_R = I_s \quad , \qquad I_L + I_C = 0$$

دیاگرام فیزوری در شکل روبرو نشان داده شده است.

✓ **توجه:** اندازه جریان در سلف و خازن، دو برابر اندازه جریان I_s است.

اگر در مدار قبلی، به جای مقاومت یک اهمی، مقاومت ۲۵۰ اهمی قرار دهیم، ملاحظه می‌شود که جریان گذرنده از سلف و خازن می‌تواند به مراتب از جریان منبع I_s بیشتر باشد و مفهوم تشدید دقیقاً به این مطلب اشاره می‌کند. یعنی اگر فرکانس سیگنال ورودی، برابر با فرکانس تشدید مدار باشد، جریان گذرنده از سلف و خازن می‌تواند خیلی بزرگتر از منبع جریان باشد. جریان منبع نیز تماماً از مقاومت می‌گذرد.

$$Z(j\omega) = 250, \qquad V = Z(j\omega)I_s = 250\angle 0°$$

$$I_R = \frac{V}{R} = 1, \qquad I_C = j\omega CV = 500e^{j90°}, \qquad I_L = \frac{V}{j\omega L} = -j500 = 500e^{-j90°}$$

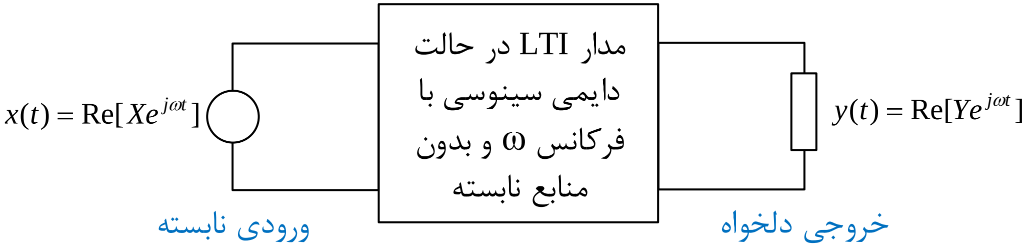
ضریب کیفیت مدار $Q = \omega_0 RC = 500$ و دیده می‌شود که:

$$\frac{|I_L|}{|I_s|} = \frac{|I_C|}{|I_s|} = Q = 500$$

اگر به جای مدار تشدید RLC موازی، **مدار تشدید RLC سری** در نظر بگیریم، مجموع امپدانس سلف و خازن سلف در فرکانس تشدید صفر شده و امپدانس معادل، برابر با مقاومت R می‌شود. یعنی **در فرکانس تشدید، سلف و خازن سری همانند یک شاخه اتصال کوتاه رفتار می‌کنند.** به بیان دیگر، در یک مدار تشدید سری که دامنه ولتاژ ورودی چند ولت است، دامنه ولتاژ دو سر خازن یا سلف می‌تواند چند صد ولت باشد. بنابراین در اندازه گیری ولتاژ دو سر خازن مربوط به یک مدار سری باید دقت شود.

۴–۳–۳– تابع شبکه و پاسخ فرکانسی

❑ **مفهوم تابع شبکه و پاسخ فرکانسی:** در یک شبکه دو درگاهی به صورت روبرو، **تابع شبکه** را می توان به صورت نسبت خروجی مورد نظر مدار به ورودی آن، در حوزه فرکانسی، تعریف کرد. به بیان دیگر، تابع شبکه، نسبت فیزور خروجی به فیزور ورودی می باشد و به محل ورودی و خروجی در نظر گرفته شده بستگی دارد.



$$H(j\omega) \triangleq \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

❖ **نکات مورد توجه در مورد تابع شبکه:**

✓ تابع شبکه عموماً تابعی از فرکانس ω است.

✓ تابع شبکه به محل اعمال ورودی و محل مشاهده پاسخ بستگی دارد و بر همین اساس در یک مدار، بسته به محل ورودی و خروجی، متفاوت خواهد بود. امپدانس و ادمیتانس ورودی، حالت های خاص از مفهوم کلی تابع شبکه هستند.

✓ زاویه تابع معمولاً در فاصله $-\frac{\pi}{2}$ تا $+\frac{\pi}{2}$ در نظر گرفته می‌شود زیرا المان ها پسیو هستند.

✓ تابع شبکه، نشان دهنده مشخصه مدار N در فرکانس ω است و **با داشتن تابع شبکه در فرکانس ω (دامنه و فاز)، می‌توان خروجی مدار را برای هر سیگنال سینوسی با فرکانس ω و در حالت دائمی به دست آورد:**

$$Y(j\omega) = H(j\omega).X(j\omega)$$

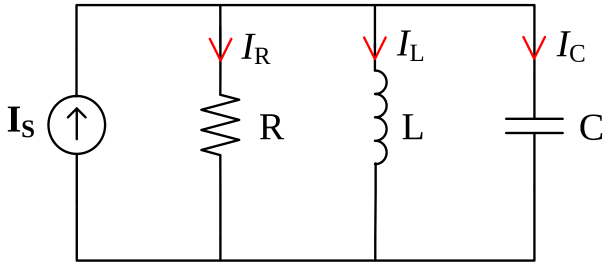
$$|Y| = |H(j\omega)||X| \;, \quad \angle Y = \angle H(j\omega) + \angle X$$

مثلاً اگر $x(t) = X_m Cos(\omega t + \varphi)$ در این صورت:

$$y(t) = X_m|H(j\omega)|Cos(\omega t + \varphi + \angle H(j\omega))$$

❖ **پاسخ فرکانسی:** نمایش منحنی های $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$ بر حسب ω یا $log\omega$ را پاسخ فرکانسی مدار گویند، زیرا این منحنی ها تمام اطلاعات لازم مربوط به پاسخ حالت دائمی سینوسی را دارند. با داشتن این منحنی‌ها می‌توان $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$ را در هر فرکانس تعیین و بنابراین خروجی را از رابطه های بالا به دست آورد.

❑ **مثال)** در مدار مقابل، تابع شبکه $H(j\omega)=I_R(j\omega)/I_S(j\omega)$ را محاسبه کنید.



■ **حل:**

$$H(j\omega)=\frac{I_R(j\omega)}{I_S(j\omega)}=\frac{G}{G+j\omega C+\frac{1}{j\omega L}}$$

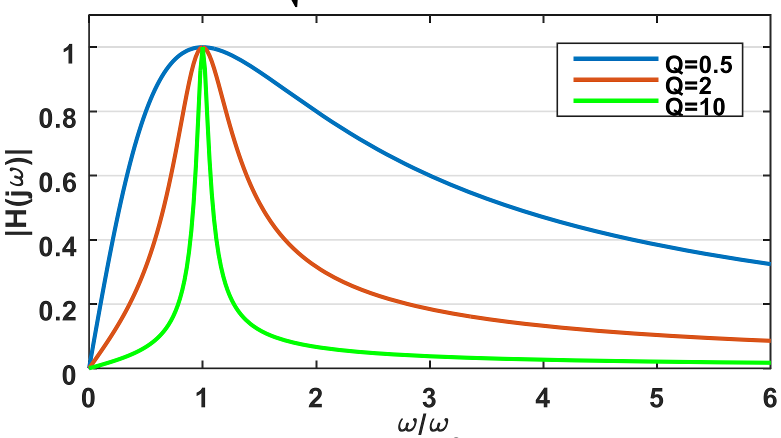
$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC+\frac{R}{j\omega L}}=\frac{1}{1+jR(\omega C-\frac{1}{\omega L})}\Rightarrow H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega_o RC(\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega})}\ ,\ \omega_o=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

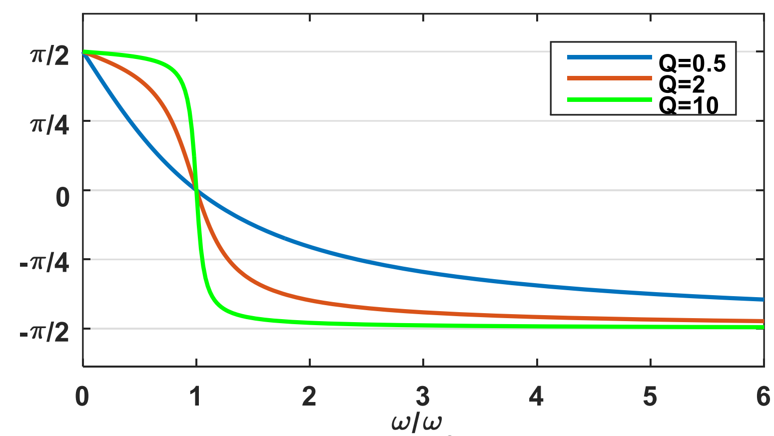
با توجه به تعریف ضریب کیفیت Q یک مدار مرتبه دوم، خواهیم داشت:

$$Q\triangleq\frac{\omega_o}{2\alpha}\ \rightarrow Q\triangleq\omega_o RC\quad\rightarrow H(j\omega)=\frac{1}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega})}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}}$$

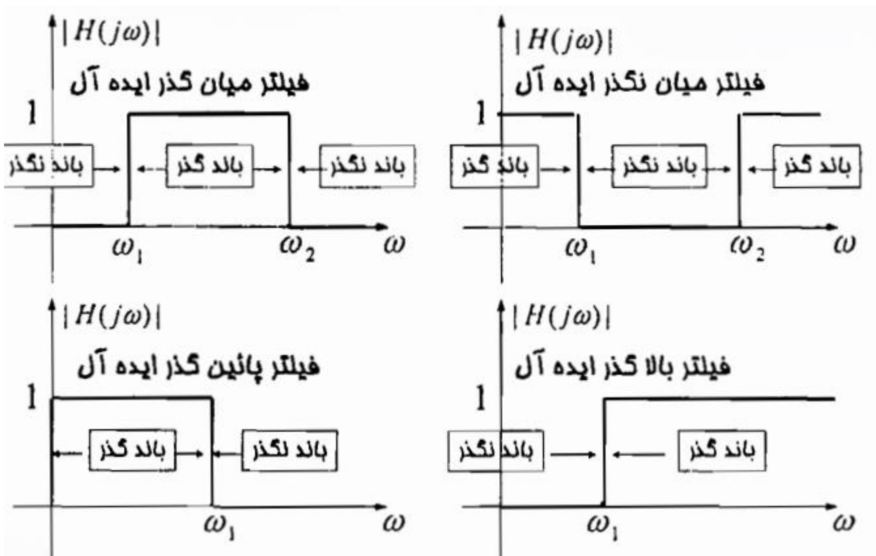
$$\angle H(j\omega)=-\tan^{-1}(Q(\frac{\omega}{\omega_o}-\frac{\omega_o}{\omega}))$$

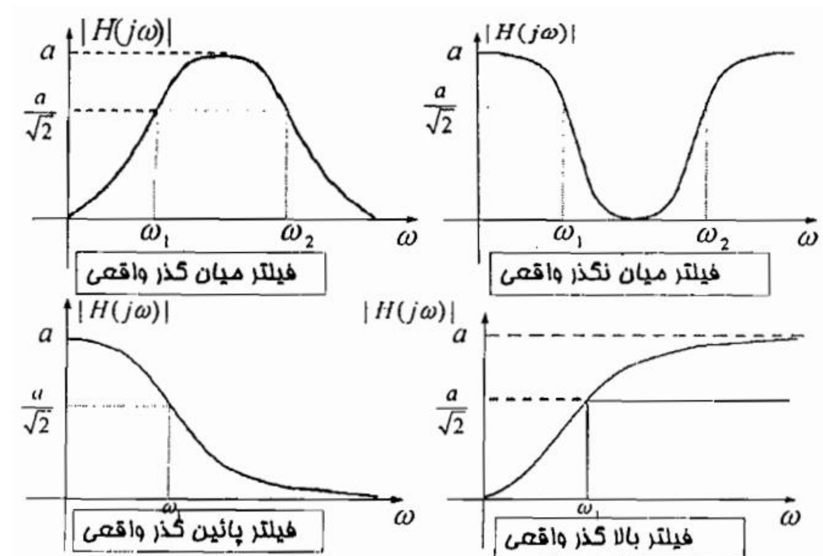




تابع شبکه مورد بحث، مانند یک فیلتر میان گذر رفتار می کند. ملاحظه می شود که با افزایش Q، رفتار فیلتری تابع شبکه قوی تر می شود. در واقع هرچه Q بزرگتر باشد، منحنی اندازه باریکتر می‌شود و بنابراین **پهنای باند گذر** فیلتر کمتر خواهد شد.

❑ برحسب اینکه پاسخ فرکانسی فیلتر مطابق کدام شکل زیر باشد، نام خاصی به آن فیلتر داده می‌شود. در مجموع چهار حالت فیلتری وجود دارد که **براساس باند گذر** به صورت های زیر تعریف می شوند (شکل سمت چپ). از نظر فیزیکی، ساختن مداری که مشخصه پاسخ فرکانسی آن **ایده آل** باشد (با توجه به تیزی مشخصه های پاسخ فرکانسی)، عملاً غیر ممکن بوده و به صورت واقعی قابل تحقق یا ساختن نیستند. در عمل، مشخصه های هموازی که به نحوی شبیه مشخصه های ایده آل باشد (با تقریب)، مورد استفاده قرار می‌گیرد که در شکل سمت راست نشان داده شده است.





❖ **باند گذر 3dB یا تضعیف $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر:** در لبه های باند گذر، $|H(j\omega)|$ برابر با نسبت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ از مقدار ماکزیمم باند گذر است. مثلاً در مدار RLC موازی، اندازه ماکزیمم $H(j\omega)$ در فرکانس $\omega = \omega_0$ برابر یک است. پس با مساوی قرار دادن $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ می‌توان فرکانس باند گذر را به دست آورد. dB مخفف **دسی‌بل** (Decibel) است. تعریف ولتاژ و جریان برحسب dB به صورت زیر است:

جریان بر حسب دسی بل = 20log جریان **یا** ولتاژ بر حسب دسی بل = 20log ولتاژ

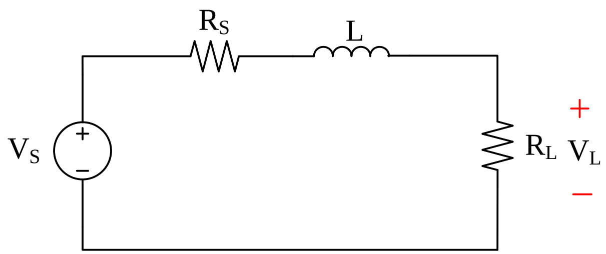
و به طریق مشابه، تابع شبکه $H(j\omega)$ را می توان برحسب دسی بل بیان کرد:

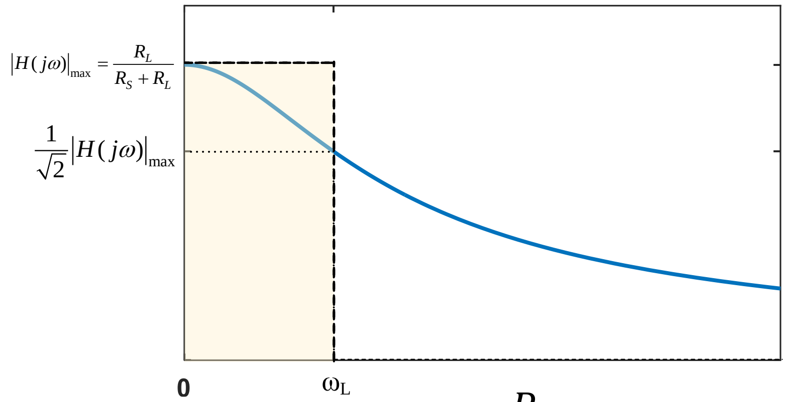
$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log|\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega)|$$

چون $20log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$ بنابراین تضعیف اندازه با ضریب $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر با همان کاهش اندازه به مقدار $3dB$ است.

$$20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|H(j\omega)|_{\max}\right) = 20\log|H(j\omega)|_{\max} - 3\,db$$

✓ مثال فیلتر پایین گذر:



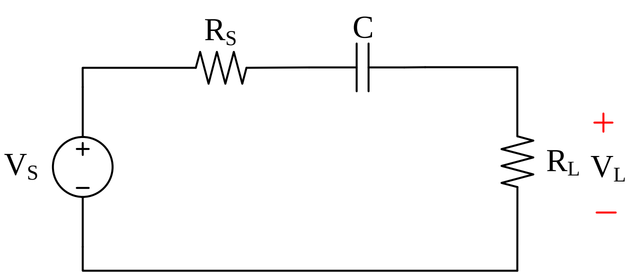


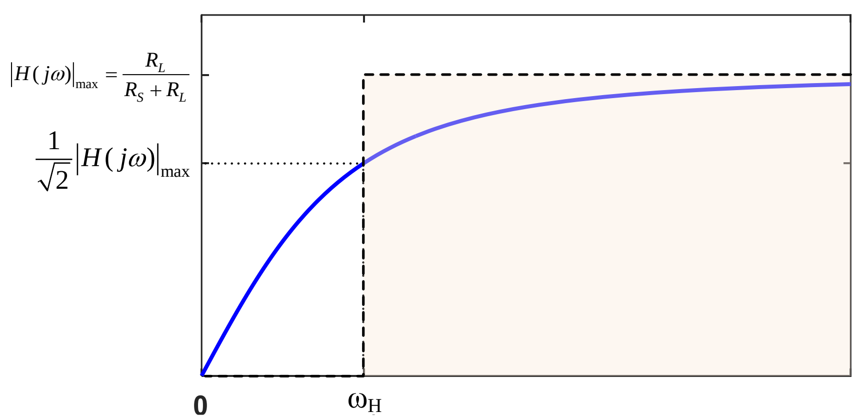
$$H(j\omega) = \frac{V_L}{V_S} = \frac{R_L}{R_S + R_L + j\omega L} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{R_L}{\sqrt{(R_S + R_L)^2 + \omega^2 L^2}}$$

پهنای باند فیلتر در این مثال، با فرکانس قطع فیلتر ω_L برابر است.

$$|H(j\omega_L)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H(j\omega)|_{max} \rightarrow \omega_L = \frac{R_S + R_L}{L}$$

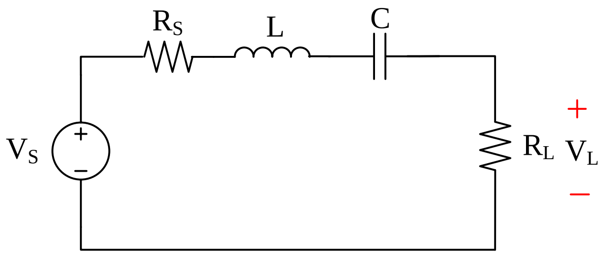
✓ مثال فیلتر بالا گذر:

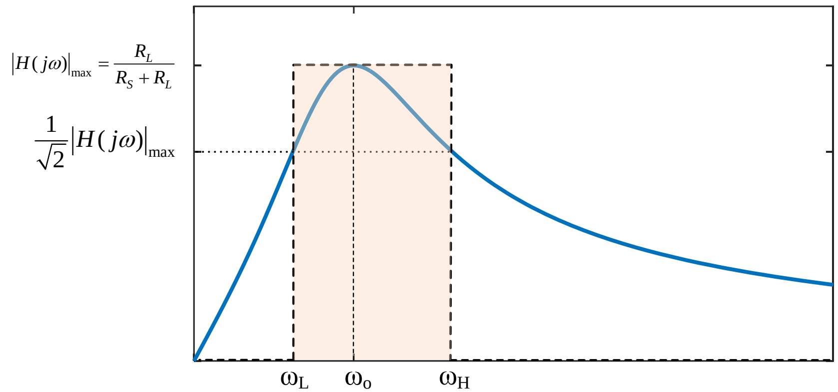




$$H(j\omega) = \frac{V_L}{V_S} = \frac{R_L}{R_S + R_L - \frac{j}{\omega C}} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{R_L}{\sqrt{(R_S + R_L)^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

✓ **مثال فیلتر میان گذر:**





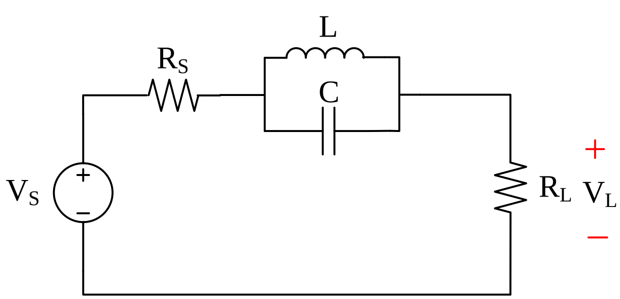
$$H(j\omega) = \frac{V_L}{V_S} = \frac{R_L}{R_S + R_L + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{R_L}{\sqrt{(R_S + R_L)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

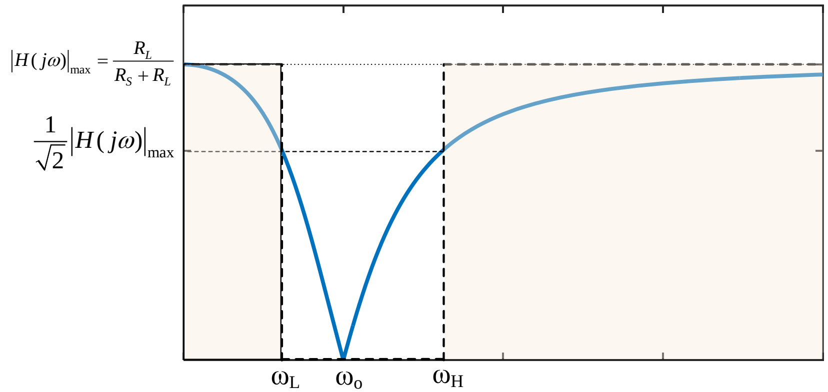
مقدار تابع شبکه فوق در فرکانس تشدید، حداکثر می شود. ضمناً پهنای باند فیلتر فوق برابر است با:

$$\boldsymbol{\Delta\omega = \omega_{H} - \omega_{L}}$$

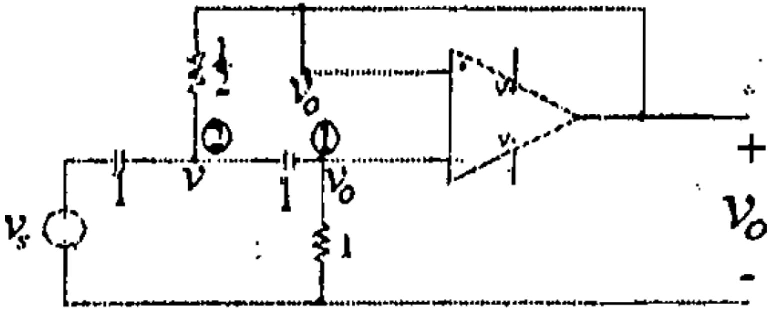
ω_H و ω_L را **فرکانس های قطع** و $\Delta\omega = \omega_H - \omega_L$ را **پهنای باند گذر** گویند.

✓ **مثال فیلتر میان نگذر:**





$$H(j\omega) = \frac{V_L}{V_S} = \frac{R_L}{R_S + R_L + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{R_L}{\sqrt{(R_S + R_L)^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}\right)^2}}$$



❑ **مثال)** تابع شبکه مدار شکل مقابل را تعیین و رفتار فیلتری آن را مشخص کنید.

■ **حل)**

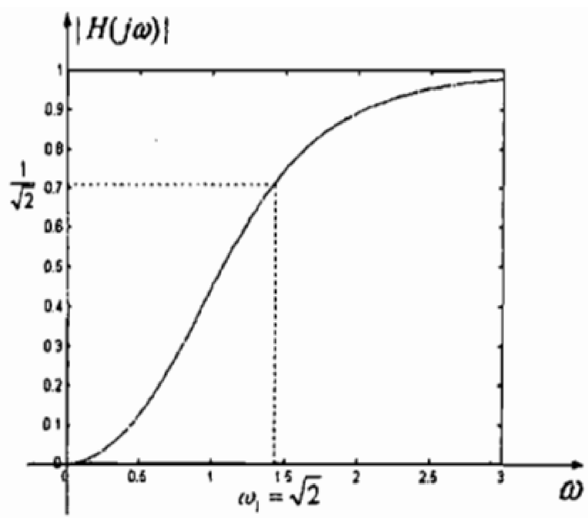
$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)}$$

KCLدر گره 1 : $V_o + j\omega(V_o - V) = 0$

KCLدر گره 2 : $2(V - V_o) + j\omega(V - V_s) + j\omega(V - V_o) = 0$

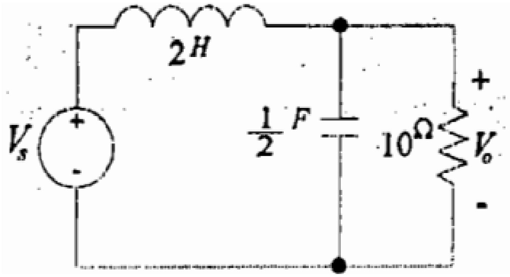
$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{-\omega^2}{2 - \omega^2 + j2\omega} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + 4}}$$

این مدار خاصیت فیلتری بالا گذر دارد که فرکانس قطع آن چنین است:



$$\frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{2}$$

****



❑ **مثال)** تابع شبکه مدار شکل مقابل را تعیین و رفتار فیلتری آن را مشخص کنید.

■ **حل)**

$$H(j\omega)=\frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)}$$

Z_1 امپدانس اتصال مقاومت 10 اهم و خازن $\frac{1}{2}$ فاراد بوده و مقدار آن برابر است با:

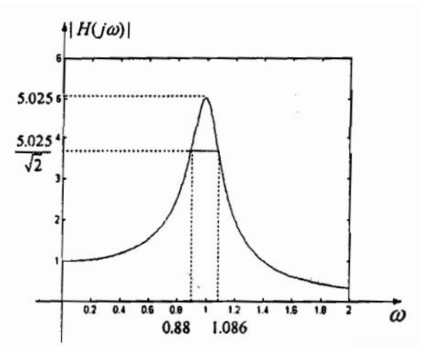
$$Z_1=\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{2}j\omega}=\frac{10}{1+j5\omega}$$

V_o را می‌توان به صورت تقسیم کننده ولتاژ تعیین کرد:

$$V_o=\frac{Z_1}{j2\omega+Z_1}V_s\ \Rightarrow\ H(j\omega)=\frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)}=\frac{5}{5(1-\omega^2)+j\omega}\Rightarrow |H(j\omega)|=\frac{5}{[25(1-\omega^2)^2+\omega^2]^{\frac{1}{2}}}$$

می‌توان ماکزیمم $|H(j\omega)|$ را از طریق مشتق‌گیری تعیین کرد:

$$\frac{d}{d\omega}|H(j\omega)|=0\ \Rightarrow\ 25\times 2\times(-2\omega)(1-\omega^2)+2\omega=0\ \Rightarrow\ 2\omega[1-50+50\omega^2]=0$$



$$\Rightarrow\ \omega_{max}=\frac{7}{\sqrt{50}}=0.9899\ ,\ \ |H(j\omega)|_{\omega=\omega_{max}}=\frac{5}{\left[25\left(1-\frac{49}{50}\right)^2+\frac{49}{50}\right]^{\frac{1}{2}}}=5.025$$

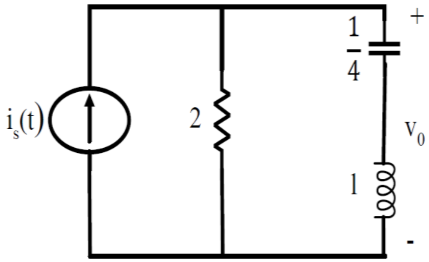
از شکل پاسخ فرکانسی مشخص است که این فیلتر، از نوع میان گذر است. برای تعیین فرکانس های قطع، معادله زیر را حل می کنیم:

$$\frac{5}{[25(1-\omega^2)^2+\omega^2]^{\frac{1}{2}}}=\frac{5.025}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \omega^4-1.96\omega^2+0.9207=0\Rightarrow\ \omega_1=0.88\,,\omega_2=1.086$$

$$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1=0.2$$

****

❑ **مثال)** تابع شبکه مدار شکل مقابل را تعیین و رفتار فیلتری آن را مشخص کنید.



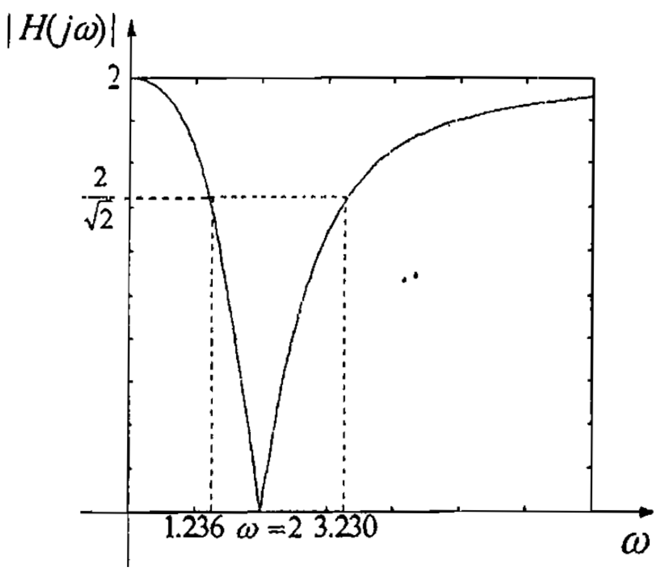
$$i_s(t)=\mathrm{Re}[I_s e^{j\omega t}]$$

■ **حل)**

امپدانس معادل اتصال موازی مقاومت ۲ اهمی و شاخه ی $(j\omega+\frac{4}{j\omega})$ برابر است با:

$$z(j\omega)=\frac{\left(j\omega+\frac{4}{j\omega}\right)2}{j\omega+\frac{4}{j\omega}+2}=\frac{2(4-\omega^2)}{4-\omega^2+j2\omega}$$

$$V_o=I_s.Z(j\omega) \Rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o(j\omega)}{I_s(j\omega)}=\frac{2(4-\omega^2)}{4-\omega^2+j2\omega} \Rightarrow |H(j\omega)|=\frac{2|4-\omega^2|}{[(4-\omega^2)^2+4\omega^2]^{\frac{1}{2}}}$$



نمودار اندازه تابع شبکه نشان می دهد که تابع آن، یک فیلتر میان نگذر است.
فرکانس های قطع برابر هستند با:

$$\frac{2|4-\omega^2|}{[(4-\omega^2)^2+4\omega^2]^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

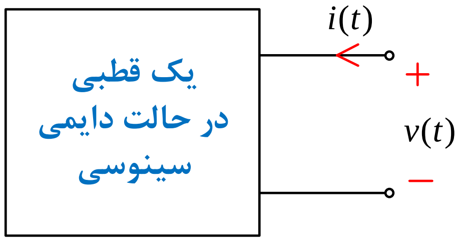
$$\Rightarrow \omega^4-12\omega^2+16=0 \quad \Rightarrow \omega^2=6\pm\sqrt{20}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1=1.236 \\ \omega_2=3.236 \end{cases}$$

****

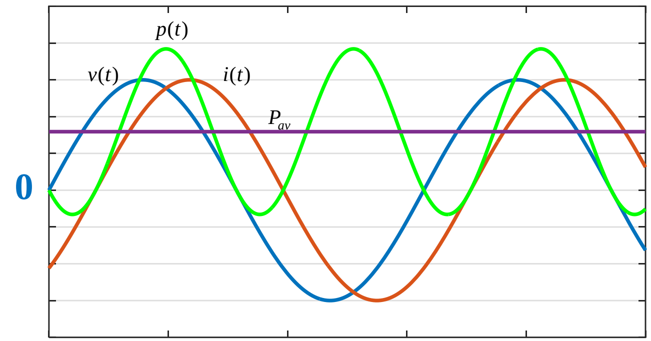
۴–۳– توان در حالت دائم سینوسی

❑ یک قطبی مقابل با ولتاژ و جریان قطب نشان داده شده را در نظر بگیرید.

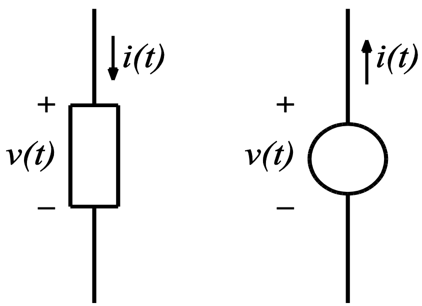


❖ **توان لحظه‌ای** یک المان مداری، از روی ولتاژ دو سر آن و جریان درون آن محاسبه می‌شود. این رابطه برای **هر المان فشرده** صادق است. توان لحظه‌ای در حالت کلی **یک کمیت متغیر با زمان** است.

$$\left.\begin{aligned} v(t) &= V_m\cos(\omega t + \angle V) \\ i(t) &= I_m\cos(\omega t + \angle I) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{توان لحظه ای}} p(t) = v(t)i(t)$$



$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}[\cos(2\omega t + \angle V + \angle I) + \cos(\angle V - \angle I)]$$



✓ طبق جهت‌های قراردادی متناظر، در یک لحظه مشخص t، اگر $p(t) > 0$ باشد، المان مداری درحال جذب توان است. اگر $p(t) < 0$ باشد، المان مداری درحال تحویل توان است. معمولاً جهت جریان در منابع به‌گونه‌ای فرض می‌شود که توان تحویل بدهند.

❖ **انرژی یا کار:** انتگرال توان لحظه‌ای است. با در نظر گرفتن جهت قراردادی متناظر، انرژی جذب‌شده توسط یک المان در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 برابر است با:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt$$

✓ اگر $v(t)$ بر حسب ولت و $i(t)$ بر حسب آمپر باشد، توان دارای واحد وات و انرژی دارای واحد ژول می‌باشد.

❖ **توان متوسط:** متوسط زمانی $p(t)$ روی یک یا چند دوره تناوب است. توان متوسط P از معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$\xrightarrow[\text{متوسط}]{\text{توان}} \quad P_{av} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v(t)i(t)dt$$

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}[\cos(2\omega t + \angle V + \angle I) + \cos(\angle V - \angle I)] \xrightarrow[\text{سینوسی}]{\text{برای ولتاژ و جریان}} \boldsymbol{P_{av} = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\angle V - \angle I)}$$

✓ گاهی توان متوسط، توان حقیقی یا توان اکتیو نیز نامیده می‌شود. معمولاً واژه توان، به معنای توان متوسط است. کل توان متوسط جذب‌شده در یک مدار، با کل توان متوسط تحویل شده برابر است. توان متوسط را می توان برحسب انرژی مصرفی در یک دوره تناوب نیز تعریف کرد:

$$P_{av} = \frac{W}{T}$$

❖ **زاویه امپدانس:** به اختلاف فاز فیزور ولتاژ و فیزور جریان، زاویه امپدانس گفته می شود:

$$\boldsymbol{Z(j\omega) = \frac{V}{I} \rightarrow \angle Z = \angle V - \angle I = \varphi}$$

✓ اگر $0 \le \angle V - \angle I \le 90°$ باشد به مدار القایی گویند (این مطلب را گاهی جلو افتادگی فاز هم گویند(Leading) (تقدم فاز)).
✓ اگر $-90° \le \angle V - \angle I \le 0$ باشد به مدار خازنی گویند (این مطلب را گاهی عقب ماندگی فاز هم گویند(lagging) (تأخیر فاز)).

✓ **نکته ۱:** زاویه امپدانس ورودی هر مدار **پسیو** (بخش حقیقی مثبت و بخش موهومی مثبت/منفی)، در هر فرکانسی بین ۹۰- تا ۹۰ درجه می باشد.

$$-90° \le \angle Z \le 90°$$

✓ **نکته ۲:** توان متوسط دریافتی توسط سلف یا خازن صفر است.

$$\angle Z = \angle V - \angle I = 90 \Rightarrow P_{av} = 0$$

✓ **نکته ۳:** در مدار **پسیو**، جزء حقیقی امپدانس (ادمیتانس) مثبت است و داریم:

$$\mathrm{Re}[Z(j\omega)] \ge 0 \Rightarrow P_{av} = \frac{1}{2}|V||I|\cos(\angle V - \angle I) \ge 0$$

❖ **القاگر:** برای یک القاگر، انرژی ذخیره‌شده برابر است با:

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

✓ اگر جریان یک القاگر متناوب باشد، انرژی ذخیره شده در انتهای یک دوره تناوب، برابر مقدار آن در شروع دوره می‌باشد. عدم تبادل انرژی خالص بیان‌گر این است که توان متوسط جذب‌شده توسط یک القاگر، برای عملکرد متناوب حالت مانا برابر با صفر است. لزوماً توان لحظه‌ای برابر صفر نیست زیرا توان می‌تواند در بخشی از دوره تناوب جذب، و در بخش دیگر دوره تناوب به مدار برگردد.

$$P_L = 0$$

علاوه بر این، از معادله ولتاژ ـ جریان متناوب برای القاگر خواهیم داشت:

$$i(t_0+T) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t_0+T} v_L(t)dt + i(t_0) \Rightarrow i(t_0+T) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t_0+T} v_L(t)dt = 0$$

$$\text{avg}[v_L(t)] = V_L = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v_L(t)dt = 0$$

❖ **بنابراین: برای جریان‌های متناوب، متوسط ولتاژ دو سر القاگر برابر صفر است.**

❖ **خازن:** برای یک خازن، انرژی ذخیره‌شده برابر است با:

$$w(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

✓ اگر ولتاژ خازن متناوب باشد، انرژی ذخیره شده در ابتدا و انتهای دوره تناوب با هم برابر خواهند بود. بنابراین، توان متوسط جذب‌شده توسط خازن برای عملکرد متناوب در حالت مانا برابر با صفر است.

$$P_C = 0$$

علاوه بر این، از معادله ولتاژ ـ جریان متناوب برای خازن خواهیم داشت:

$$v(t_0+T) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_0+T} i_C(t)dt + v(t_0) \Rightarrow v(t_0+T) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_0+T} i_C(t)dt = 0$$

$$\text{avg}[i_C(t)] = I_C = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i_C(t)dt = 0$$

❖ **بنابراین: برای ولتاژهای متناوب، جریان متوسط یک خازن صفر است.**

❖ **مفهوم مقدار مؤثر:** مقدار مؤثر یک شکل‌موج ولتاژ متناوب، براساس توان متوسطی که به یک مقاومت تحویل می‌دهد، تعریف می شود. برای ولتاژ متناوب دو سر یک مقاومت، ولتاژ مؤثر، به‌صورت ولتاژی که کارایی آن در تحویل توان متوسط به اندازه یک ولتاژ DC است، تعریف می‌شود. مقدار مؤثر یک ولتاژ یا جریان، به مقدار ریشه متوسط مجذور (RMS) نیز موسوم است.

✓ Root Mean Square (RMS)

برای ولتاژ DC دو سر یک مقاومت داریم:

$$P=\frac{V_{\rm dc}^2}{R},\quad P=\frac{V_{\rm eff}^2}{R}\Rightarrow P=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T v(t)i(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{v^2(t)}{R}dt=\frac{1}{R}\left[\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt\right]\Rightarrow V_{\rm eff}^2=\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt$$

$$V_{eff}=V_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt}\ ,\ I_{eff}=I_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$$

✓ اگر یک ولتاژ متناوب، برابر با مجموع دو ولتاژ متناوب دیگر باشد، یعنی $v(t)=v_1(t)+v_2(t)$، مقدار مؤثر $v(t)$ به صورت زیر تعیین می شود:

$$V_{\rm rms}^2=\frac{1}{T}\int_0^T(v_1+v_2)^2\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T(v_1^2+2v_1v_2+v_2^2)\,dt \Rightarrow V_{rms}^2=\frac{1}{T}\int_0^T v_1^2\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T 2v_1v_2\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T v_2^2\,dt$$

که اگر دو تابع v_1 و v_2 متعامد (Orthogonal) باشند، عبارتی که شامل v_1v_2 است، برابر با صفر است. یکی از شرایطی که این وضعیت را ایجاد می‌کند این است که v_1 و v_2 دو تابع سینوسی با فرکانس‌های متفاوت باشند. بنابراین:

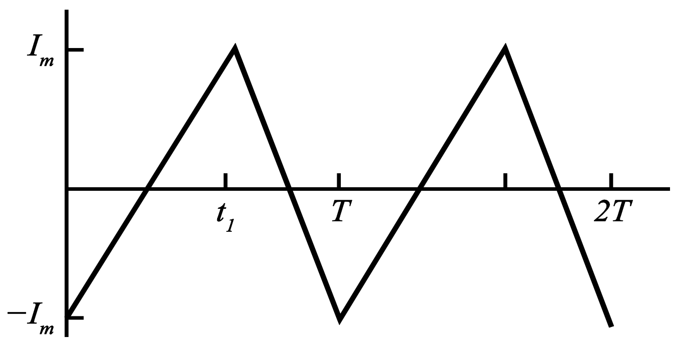
$$V_{\rm rms}^2=\frac{1}{T}\int_0^T v_1^2(t)\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T v_2^2(t)\,dt$$

$$\Rightarrow V_{rms}=\sqrt{V_{1,rms}^2+V_{2,rms}^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} V_{rms}=\sqrt{V_{1,rms}^2+V_{2,rms}^2+V_{3,rms}^2+\cdots}=\sqrt{\sum_{n=1}^{N}V_{n,rms}^2}\\ I_{rms}=\sqrt{I_{1,rms}^2+I_{2,rms}^2+I_{3,rms}^2+\cdots}=\sqrt{\sum_{n=1}^{N}I_{n,rms}^2}\end{cases}$$

✓ مقدار RMS شکل موج های معروف عبارتند از:

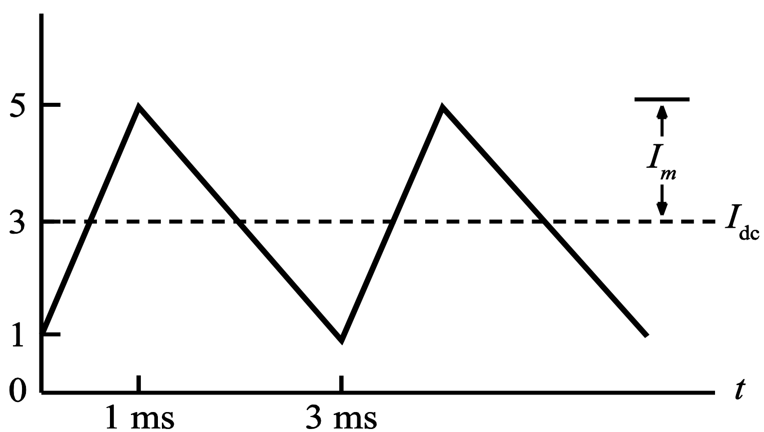
$$i = cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow I_{eff} = [\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_m^2 cos^2(\omega t + \varphi)dt]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{I_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m}$$



$$i(t) = \begin{cases} \frac{2I_m}{t_1} t - I_m & 0 < t < t_1 \\ \frac{-2I_m}{T - t_1} t + \frac{I_m(T + t_1)}{T - t_1} & t_1 < t < T \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{rms}^2 = \frac{1}{T}\left[\int_0^{t_1} \left(\frac{2I_m}{t_1} t - I_m\right)^2 dt + \int_{t_1}^{T} \left(\frac{-2I_m}{T-t_1} t + \frac{I_m(T+t_1)}{T-t_1}\right)^2 dt\right]$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{3}}}$$



$$I_{rms} = \sqrt{I_{1,rms}^2 + I_{2,rms}^2} = \sqrt{\left(\frac{I_m}{\sqrt{3}}\right)^2 + I_{dc}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 3^2} = 3.22 \text{ A}$$

❑ مثال) مقدار مؤثر مجموع شکل‌موج‌ها: مقدار مؤثر تابع ولتاژ $v(t) = 4 + 8sin(\omega_1 t + 10^{\circ}) + 5sin(\omega_2 t + 50^{\circ})$ را برای الف) $\omega_2 = 2\omega_1$ و ب) $\omega_2 = \omega_1$ به‌دست آورید.

■ حل)

الف) مقدار مؤثر یک موج سینوسی، به‌تنهایی برابر با $V_m/\sqrt{2}$ می‌باشد و مقدار مؤثر یک مقدار ثابت، همان مقدار ثابت است. هنگامی‌که موج سینوسی دارای فرکانس‌های متفاوتی باشد، جملات متعامد هستند پس:

$$V_{rms} = \sqrt{V_{1,rms}^2 + V_{2,rms}^2 + V_{3,rms}^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = 7.78\ \text{V}$$

ب) هنگامی‌که سینوسی‌ها دارای فرکانس یکسانی هستند، انتگرال حاصل‌ضرب دوبه‌دوی آنها در طول یک دوره تناوب صفر نمی‌باشد. بنابراین، ابتدا سینوسی‌ها را به‌صورت فیزوری با هم جمع می‌کنیم:

$$8\angle 10^{\circ} + 5\angle 50^{\circ} = 12.3\angle 25.2^{\circ}$$

$$\Rightarrow v(t) = 4 + 12.3\sin(\omega_1 t + 25.2^{\circ})V$$

$$=> V_{rms} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{12.3}{\sqrt{2}}\right)^2} = 9.57\ \text{V}$$

****

❖ **توان مختلط:** برای مدار در **حالت دائمی سینوسی** به شکل مقابل تعریف می شود (گاهی با P هم نمایش داده می شود):

$$\boldsymbol{S \triangleq (V_{rms})(I_{rms})^*}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}|V||I|e^{j\angle V-\angle I} \rightarrow \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}|V||I|\cos(\angle V-\angle I) + j\frac{1}{2}|V||I|\sin(\angle V-\angle I)$$

✓ جزء حقیقی توان مختلط مساوی توان متوسط است.

$$\boldsymbol{P_{av} = Re[S] = \frac{1}{2}|V||I|cos(\angle V-\angle I) = V_{rms}I_{rms}cos(\angle V-\angle I)}$$

✓ به جزء موهومی توان مختلط، توان مجازی (یا راکتیو) گفته می شود و با Q نشان داده میشود.

$$\boldsymbol{Q = Im[S] = \frac{1}{2}|V||I|sin(\angle V-\angle I) = V_{rms}I_{rms}sin(\angle V-\angle I)}$$

✓ بنابراین توان مختلط را می توان به صورت مقابل بازنویسی کرد:

$$\boldsymbol{S = P + jQ = (V_{rms})(I_{rms})^*}$$

توان حقیقی (اکتیو)

توان مجازی (راکتیو)

✓ اگر $0 \le \angle V - \angle I \le 90°$ باشد، اصطلاحاً به مدار، بار القایی گویند.

✓ اگر $-90° \le \angle V - \angle I \le 0$ باشد، اصطلاحاً به مدار، به مدار خازنی گویند.

$$V = ZI \implies \boldsymbol{S = VI^* = \frac{VV^*}{Z^*} = \frac{|V|^2}{Z^*}}$$

$$\boldsymbol{S} = VI^* = \boldsymbol{ZII^* = R|I|^2 + jX|I|^2}$$

✓ **واحد توان مختلط: ولت ـ آمپر (VA)، توان حقیقی: وات (W) و توان مجازی: ولت ـ آمپر راکتیو (VAR) می باشد.**

❖ اگر تمام عناصر مدار اجزاء پسیو باشند (یعنی مقاومت ها و خازن ها و سلف ها مثبت باشند)، در این صورت سلف ها و خازن ها انرژی ذخیره کرده و مقاومت ها انرژی تلف می کنند. به موجب اصل بقای انرژی، توان متوسط وارد شونده به یک مدار تک قطبی در حالت دائمی سینوسی باید نامنفی باشد.

❖ **توان ظاهری** (S): توان ظاهری (Apparent Power)، حاصل‌ضرب مقادیر جریان مؤثر و ولتاژ مؤثر است و معمولاً برای بیان ظرفیت تجهیزات قدرت مانند ترانسفورمرها استفاده می‌شود. توان ظاهری به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$S = V_{rms} I_{rms}$$

✓ **در مدارهای AC (مدارهای خطی با منابع سینوسی)، توان ظاهری با دامنه توان مختلط برابر است.**

❖ **ضریب توان:** ضریب توان (Power Factor) یک بار، به‌صورت نسبت توان متوسط به توان ظاهری تعریف می‌شود:

$$\mathrm{pf} = \frac{P}{S} = \frac{P}{V_{rms} I_{rms}}$$

✓ **در مدارهای AC سینوسی**، نتیجه محاسبات بالا به‌صورت زیر درمی‌آید که φ زاویه فاز بین ولتاژ و جریان سینوسی است. **اما این یک حالت خاص است و فقط باید زمانی مورد استفاده قرار گیرد که هر دوی ولتاژ و جریان سینوسی باشند.**

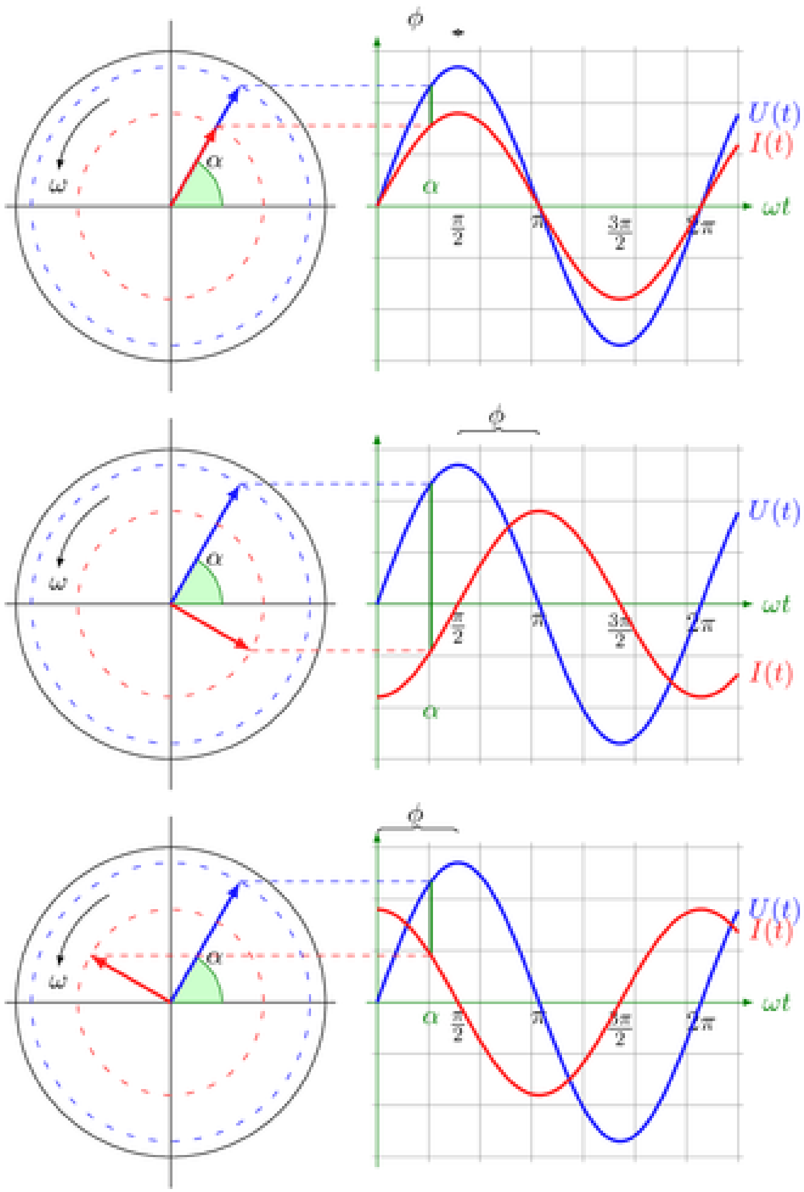
$$\mathbf{Pf = cos}(\angle \boldsymbol{V} - \angle \boldsymbol{I})\mathbf{= cos}(\boldsymbol{\varphi})$$

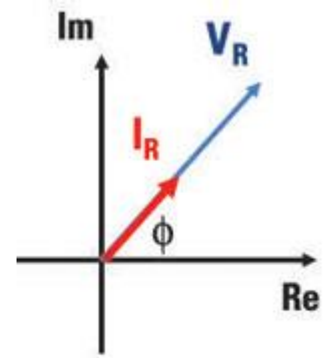
✓ توان ظاهری در مدارهای AC، برابر با اندازه توان مختلط می‌باشد:

$$S = |\mathbf{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

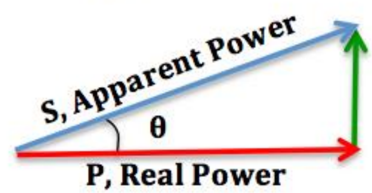
✓ **یادآوری این نکته مهم** است که رابطه توان مختلط و همچنین ضریب توان $\cos(\theta - \Phi)$، حالت‌های خاصی برای مدارهای AC سینوسی می‌باشند و قابل استفاده برای مدارهای غیرسینوسی نمی‌باشند. در مدارهای AC (مدارهای خطی با منابع سینوسی)، توان ظاهری با دامنه توان مختلط برابر است.

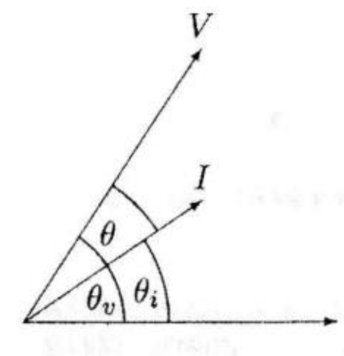
❖ **مفهوم مثلث توان:** با توجه به ماهیت توان مختلط، می توان مقادیر توان های اکتیو و راکتیو و مختلط را به صورت مثلثی نشان داد و نیز زاویه توان را برای آن ها در همان شکل مورد بررسی قرار داد.



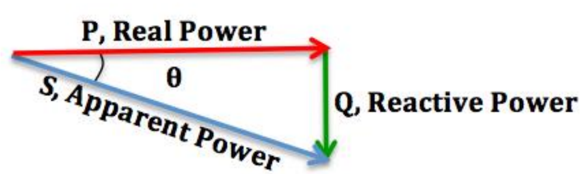


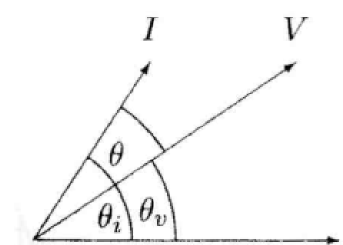
Lagging Power Factor



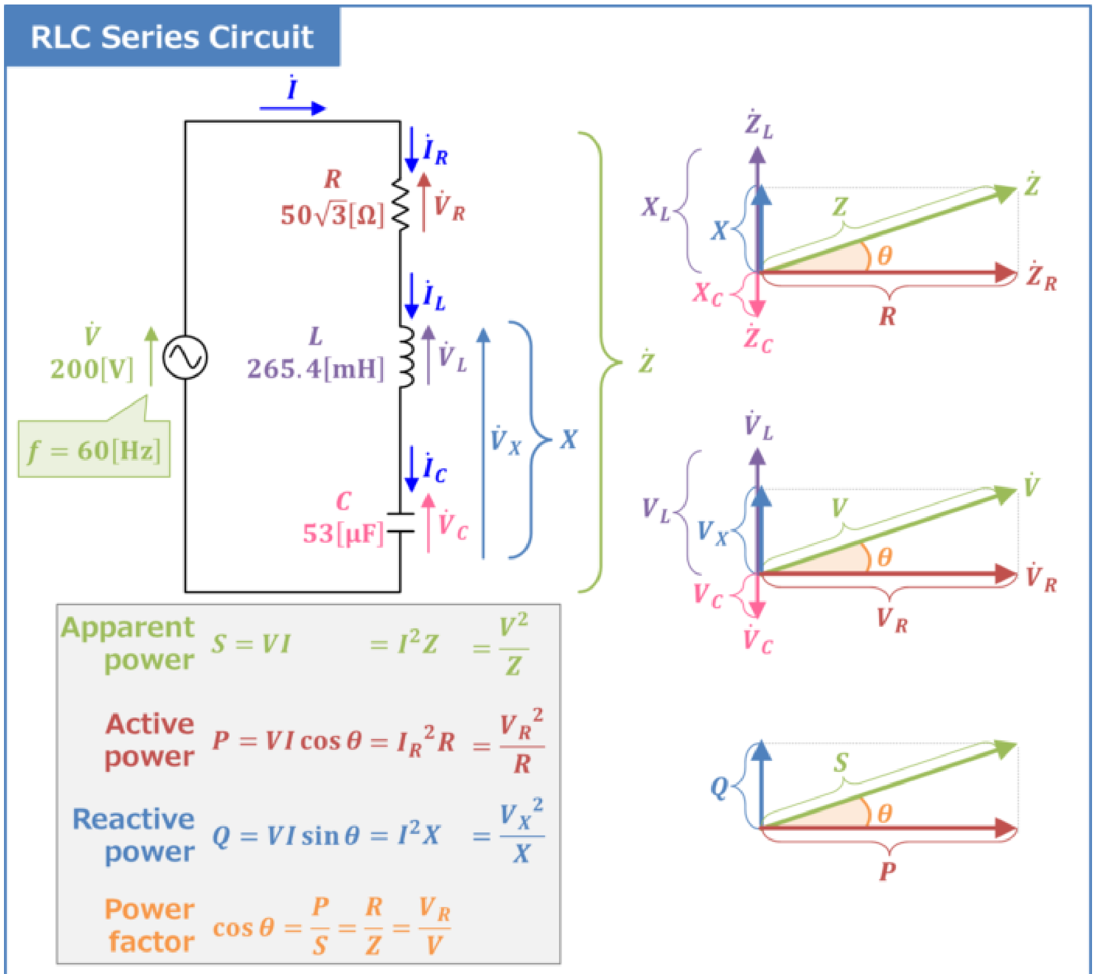


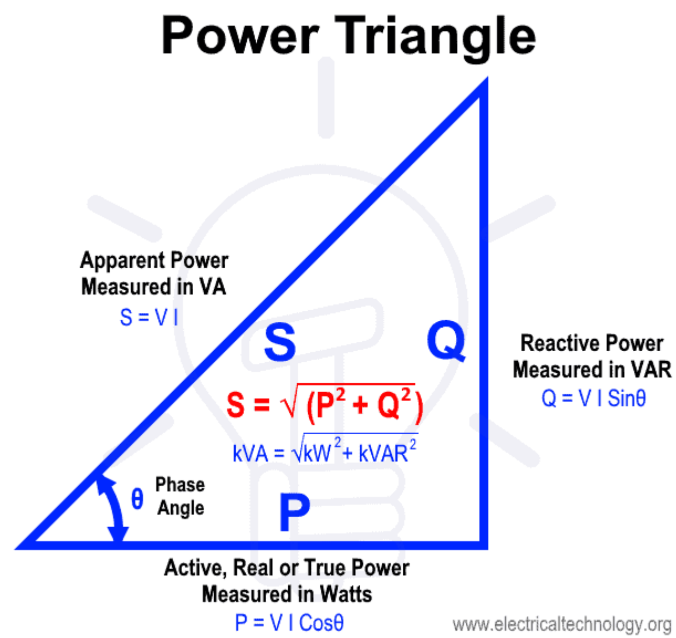
Leading Power Factor



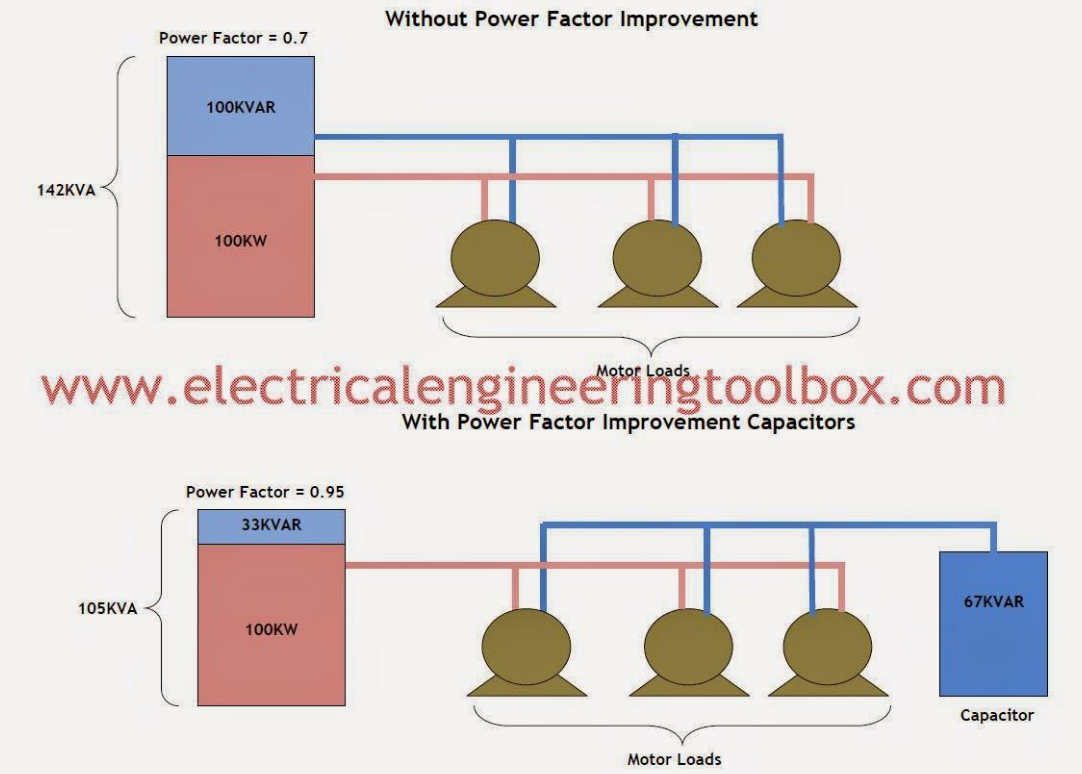


❖ **اصلاح ضریب توان (PFC) یا جبران سازی توان راکتیو:** ظرفیت وسایل برقی، توسط ضرب مقادیر مؤثر ولتاژ در جریان (توان ظاهری) کشیده شده از منبع تعیین شده و بستگی به ضریب توان ندارد. اما توان مصرفی یا همان توان اکتیو یا متوسط، وابسته به ضریب توان است و برای استفاده صحیح، لازم است ضریب توان در توان نامی تجهیزات بزرگ باشد. در این شرایط، توان اکتیو و توان ظاهری نزدیک به یکدیگر بوده و سهم توان راکتیو که بین منبع و مصرف‌کننده در حال تبادل بوده و صرفاً ظرفیت سیم‌های انتقال توان را اشغال می‌کند، کم خواهد شد. روابط زیر مربوط به توان ظاهری، اکتیو، و راکتیو در حال سینوسی تک فاز هستند که جهت یادآوری مجدداً بیان شده‌اند:





مثلث توان و یک مثال از پس فازی بار.



بیان مفهوم توان راکتیو و جبران سازی با استفاده از خازن در بارهای القایی.

❑ **مثالی از ضرورت اجرای PFC:** یک مولد تک فاز کوچک (f=50HZ و I=10A و V=220)، بار 22Ω را تغذیه می کند. توان خروجی مولد یا توان بار برای ضرایب توان 1، نیم (پس فاز)، و صفر چقدر است؟

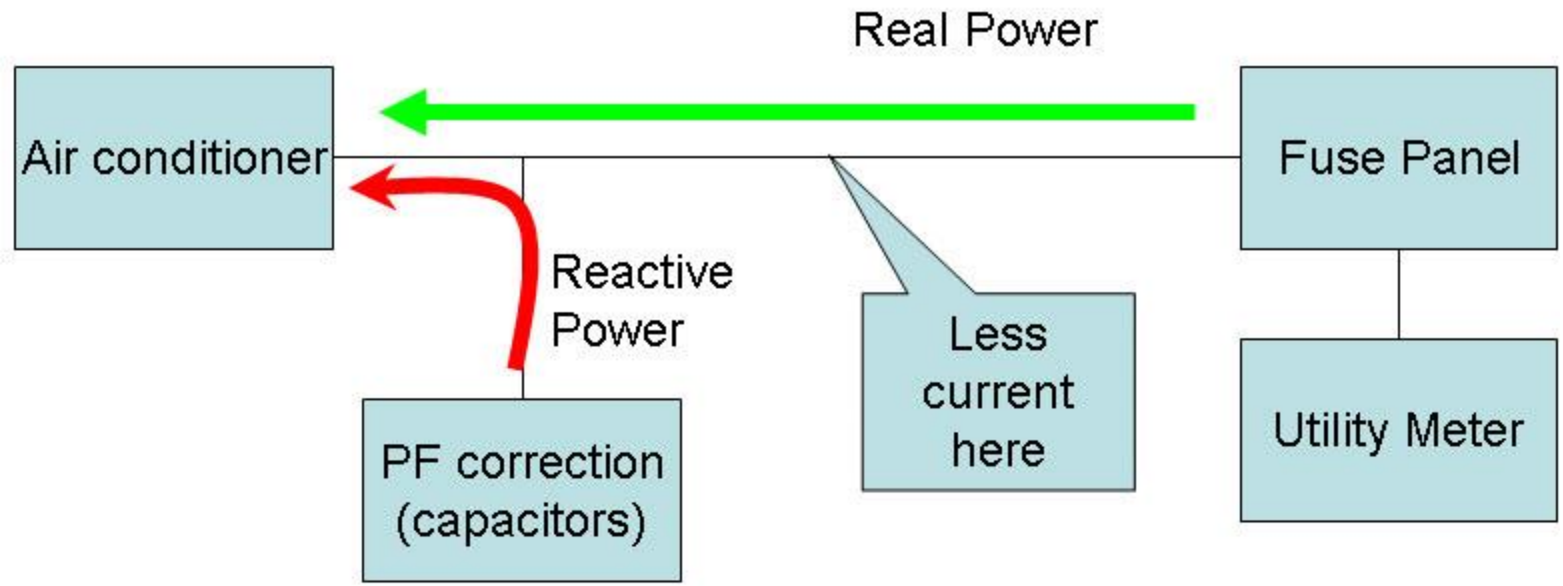
$$\cos\phi = 1 \Rightarrow I = \frac{220}{22} = 10A \qquad W_L = 10 \times 220 \times \cos\phi = 2/2kw$$

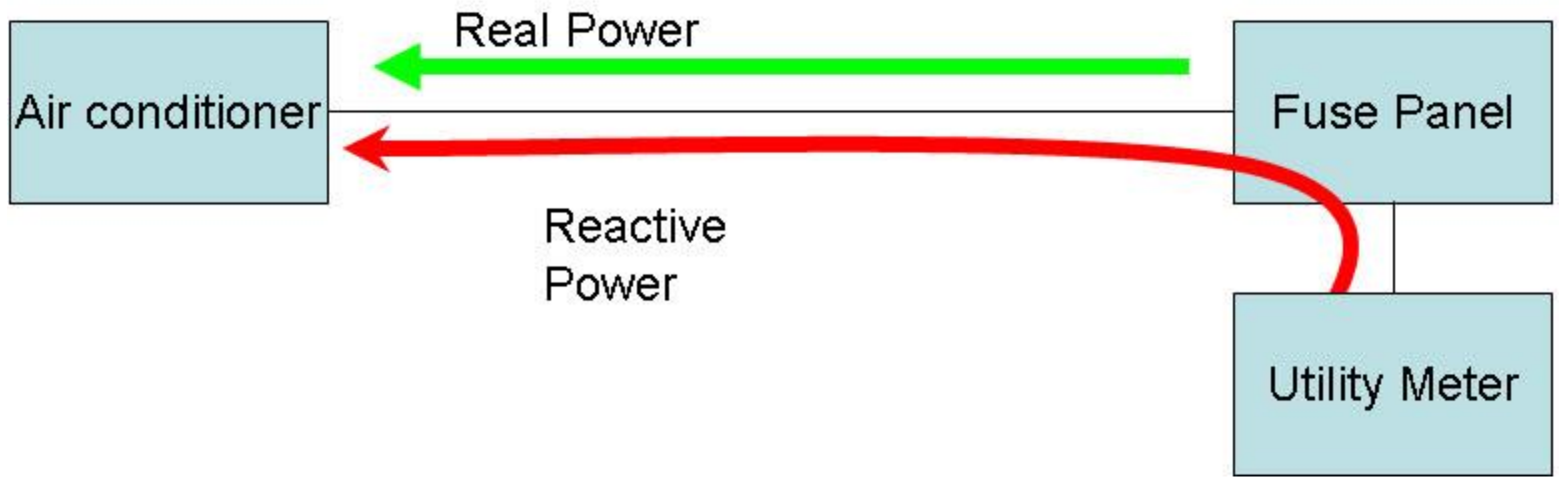
$$S = V \times I = 220 \times 10 = 2/2kw$$

$$\cos\phi = 0/5 \ (\text{مقاومت و القاگر}) \Rightarrow W_L = 220 \times 10 \times 0/5 = 1/1kw \qquad I = \frac{220}{22} = 10A$$

$$\cos\phi = 0 \ (\text{القاگر خالص}) \Rightarrow W_L = 220 \times 10 \times 0 = 0$$

در مثال بالا در هر سه حالت یک جریان از مولد کشیده می شود و افزایش بیشتر از آن امکان سوختن مولد را دارد. اما بار اول کل توان، بار دوم نصف توان، بار سوم هیچ توانی را مصرف می کنند. در واقع بارهای با ضریب توان کوچک، با این که جریان می‌کشند و ظرفیت خطوط و مولد و ترانس ها را اشغال می کنند، حداکثر توان ممکن را جذب نمی کنند. اگر اصلاح ضریب توان در بارهای به‌خصوص صنعتی که دارای عملکرد پس‌فازی با توان بالا هستند انجام نشود، جریمه‌هایی در نظر گرفته می‌شود.





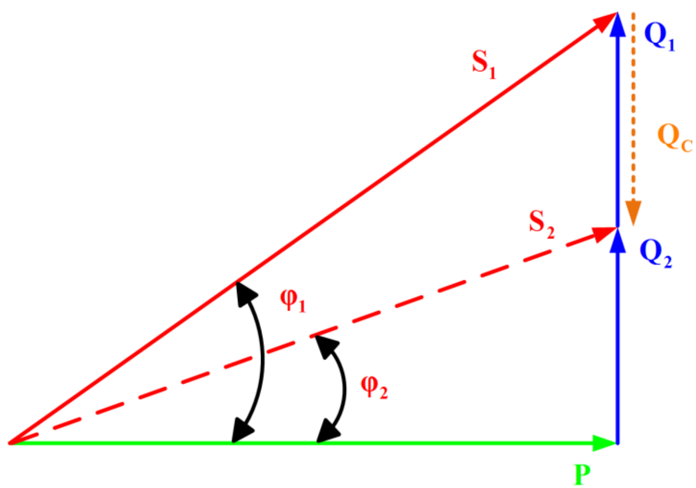
مفهوم جبران سازی با استفاده از بانک خازنی در کاهش شارش توان در خط.

❑ با توجه به مثال‌ها و نکات مذکور، دلایل لزوم به‌کارگیری اصلاح ضریب قدرت را می‌توان در قالب موارد زیر بیان نمود:

✓ با افزایش ضریب قدرت، جریان موثر خطوط انتقال کاهش یافته و تلفات حرارتی و افت ولتاژ خط کم می‌شود. ضریب توان کوچک به‌معنی سیم‌های ضخیم، و نیز فیوزها و تابلوها و کنتورها و وسایل حفاظتی بزرگتر و گرانتر بوده و در نهایت و افزایش قیمت تأسیسات را به‌دنبال خواهد داشت.

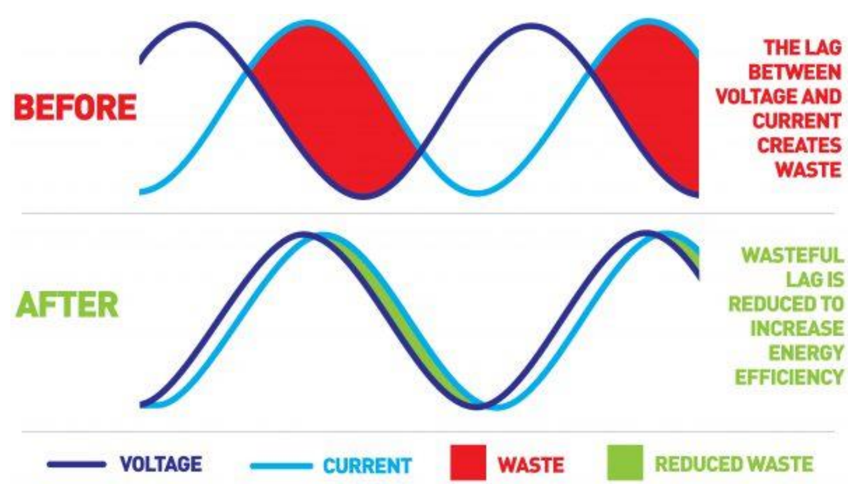
در این حالت ها، مقدار توان راکتیو مورد نیاز را برای اصلاح ضریب توان، می توان براساس شکل و رابطه زیر به دست آورد:

$$Q_C = \mathrm{P}(\tan\phi_1 - \tan\phi_2)$$

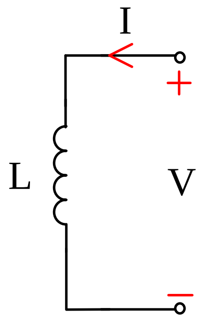


P توان اکتیو مصرف‌کننده بوده و مقدار خازن مورد نظر نیز برابر خواهد بود با:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f c} = \frac{V^2}{Q_C} \Rightarrow C = \frac{Q_c}{2\pi f v^2}$$



مفهوم کاهش ضریب توان در شکل موج های سینوسی ولتاژ و جریان.



❑ **مثال)** توان مختلط سلف مقابل را محاسبه کنید.

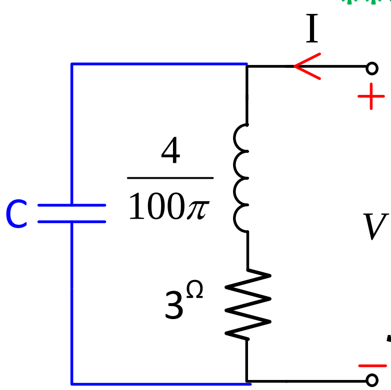
■ **حل)** $$\boldsymbol{S}=(V_{rms})(I_{rms})^*=\frac{1}{2}|V||I|cos(90)+\frac{1}{2}|V||I|sin(90)=\frac{1}{2}j\omega LII^*=\frac{1}{2}j\omega L|I|^2$$

$$\rightarrow P_{av}=0\,,\;\; Q=\frac{1}{2}\omega L|I|^2$$

ملاحظه می شود سلف یک المان مصرف کننده توان راکتیو می باشد.

برعکس سلف، خازن یک المان تولید کننده توان راکتیو می باشد (به یک معنی، در همان لحظه و در حالت موازی با سلف، تولید توان را خواهد داشت) و علامت توان راکتیو آن، مخالف علامت توان راکتیو سلف در ولتاژ یکسان است (Q<0).

****



❑ **مثال)** توان مختلط بار القایی مقابل و ضریب توان آن را محاسبه کنید. بار مذکور به برق شهر متصل است و فرکانس ۵۰ هرتز است.

■ **حل)**

$$V=230\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}Z|I|^2=\frac{1}{2}(3+j(2\pi 50)\times\frac{4}{100\pi})|I|^2=\frac{1}{2}(3+j4)|I|^2$$

$$I=\frac{230\sqrt{2}}{3+j4}=\frac{(230\sqrt{2})(3-j4)}{25}\rightarrow |I|=46\sqrt{2}$$

$$P_{av}=6348\text{ W}$$

$$\text{Q}=j8464\text{ VAR}$$

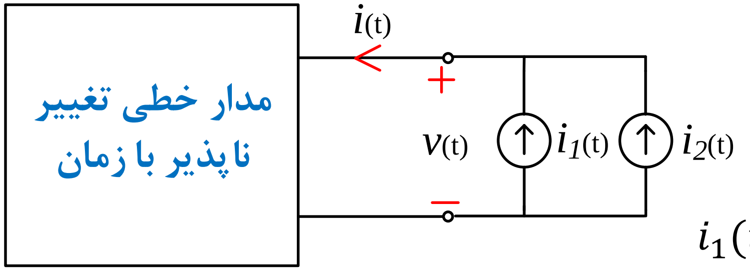
$$\cos\varphi=\frac{P_{av}}{|S|}=\frac{6348}{10580}=0.6$$

ادامه مثال) با اضافه کردن خازن به شکل موازی با بار، ضریب توان را اصلاح و به ۰/۹ برسانید (به این کار تصحیح ضریب توان (PFC) گویند).

$$Q_C=P(tan\,\phi_1-tan\,\phi_2)\text{=6348(tan(arccos(0.6))-tan(arccos(0.9)))=5389 VAR}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Q_C=\dfrac{V^2}{X_C}=100\pi C|V|^2\simeq 5390\ VAR\Rightarrow C\simeq 162\,\mu F\\ cos\varphi_{new}=\dfrac{6348}{|S|}=0.9\rightarrow |S|\simeq 7053\ \text{VA}\end{cases}$$

****



❖ **خاصیت جمع آثار در توان متوسط برای چند منبع سینوسی با فرکانس های متفاوت:** مدار مقابل را با دو ورودی سینوسی ولی با فرکانس های مختلف در نظر بگیرید:

$$i_1(t) = \mathrm{I}_{m1}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad , \quad i_2\,(t) = \mathrm{I}_{m2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

در صورت اعمال هریک از منابع جریان به تنهایی، ولتاژ دو سر مدار به شکل زیر خواهد بود:

$$v_1(t) = V_{m1}\cos(\omega_1 t + \theta_1) \quad , \quad v_2\,(t) = V_{m2}\cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

مطابق جمع آثار، برای ولتاژ v(t) و جریان i(t) میتوان نوشت:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = V_{m1}\cos(\omega_1 t + \theta_1) + V_{m2}\cos(\omega_2 t + \theta_2)$$
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_{m1}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + I_{m2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

توان لحظه ای:

$$p(t) = v(t)i(t) = \begin{aligned}[t] &[\frac{V_{m1}\mathrm{I}_{m1}}{2}\cos(2\omega_1 \mathrm{t} + \theta_1 + \varphi_1) + \frac{V_{m1}\mathrm{I}_{m1}}{2}\cos(\theta_1 - \varphi_1) \\ &+\frac{V_{m2}\mathrm{I}_{m2}}{2}\cos(2\omega_2 \mathrm{t} + \theta_2 + \varphi_2) + \frac{V_{m2}\mathrm{I}_{m2}}{2}\cos(\theta_2 - \varphi_2) \\ &+\frac{V_{m1}\mathrm{I}_{m2}}{2}\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \theta_1 + \varphi_2) + \frac{V_{m1}\mathrm{I}_{m2}}{2}\cos((\omega_1 - \omega_2)t + \theta_1 - \varphi_2) \\ &+\frac{V_{m2}\mathrm{I}_{m1}}{2}\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \theta_2 + \varphi_1) + \frac{V_{m2}\mathrm{I}_{m1}}{2}\cos((\omega_1 - \omega_2)t + \theta_2 - \varphi_1)] \end{aligned}$$

توان لحظه ای نظیر منبع اول:

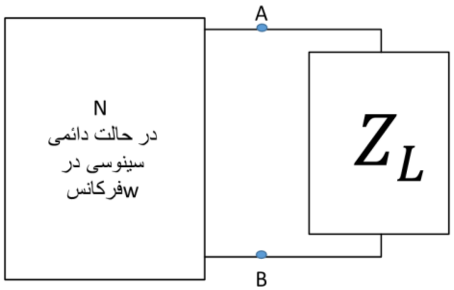
توان لحظه ای نظیر منبع دوم:

مقدار متوسط این ۴ جمله صفر است اگر

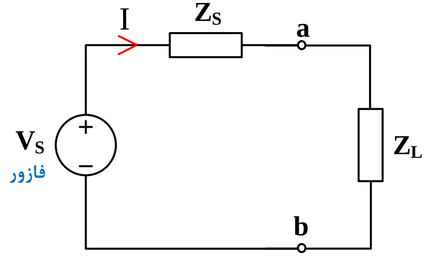
$$\boldsymbol{\omega_1 \neq \omega_2}$$

معادله فوق نشان می دهد که توان لحظه ای، برابر با مجموع توان های لحظه ای ناشی از جریان های با فرکانس ω_1 و ω_2 که به تنهایی رو مدار اثر کنند، نیست. در حقیقت مجموع توان های لحظه ای ناشی از فرکانس های ω_1 و ω_2 به تنهایی، فقط چهار جمله اول عبارت فوق است. لکن توان متوسط، برابر مجموع توان متوسط در فرکانس ω_1 و توان متوسط در فرکانس ω_2 است (جملاتی که ω ندارند).

❖ **نتیجه:** جمع آثار در حالت دائمی سینوسی، در مورد توان لحظه ای برقرار نیست. لکن در مورد توان متوسط، به شرط متفاوت بودن فرکانس ها برقرار است. اگر $\omega_1 = \omega_2$ باشد، مقدار متوسط جمله دوم سطر های سوم و چهارم غیر صفر می شود و شرط متفاوت بودن فرکانس ها به این دلیل است.



⇒



$$Z_L = {Z_S}^*$$

❖ **قضیه انتقال توان ماکزیمم (قضیه تطبیق امپدانس):**

مدار معادل تونن دیده شده از دو سر a و b به صورت مقابل است. امپدانس بار Z_L چگونه انتخاب شود تا توان متوسط انتقال داده شده به بار حداکثر شود. قضیه انتقال توان ماکزیمم بیان می کند که مقدار بهینه امپدانس بار، مساوی مزدوج مختلط Z_S است یعنی:

اثبات: توان متوسط تحویل داده شده به Z_L برحسب فیزور I چنین است:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{S} = VI^* = ZII^* = R|I|^2 + jX|I|^2 \\ P_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[Z_L]|I|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[Z_L]\frac{|V_S|^2}{|Z_S + Z_L|^2} \\ Z_S = R_S + jX_S\ ,\ \ Z_L = R_L + jX_L \end{array}\right\} \Rightarrow P_{av} = \frac{1}{2}R_L\frac{|V_S|^2}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}$$

توجه ۱: مقادیر V_S و R_S و X_S معلوم هستند و مقادیر R_L و X_L چنان باید انتخاب شوند که p_{av} حداکثر گردد.

توجه ۲: در مدار پسیو، R_L و R_S همواره مثبت می باشند. چون راکتانس X_L می تواند مثبت یا منفی باشد، پس می توان $X_L = -X_S$ انتخاب کرد تا جمله $(X_S + X_L)^2$ در مخرج کسر مساوی صفر شود.

توجه ۳: برای حداکثر کردن p_{av} برحسب مقادیر مقاومتی امپدانس ها، از آن مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم:

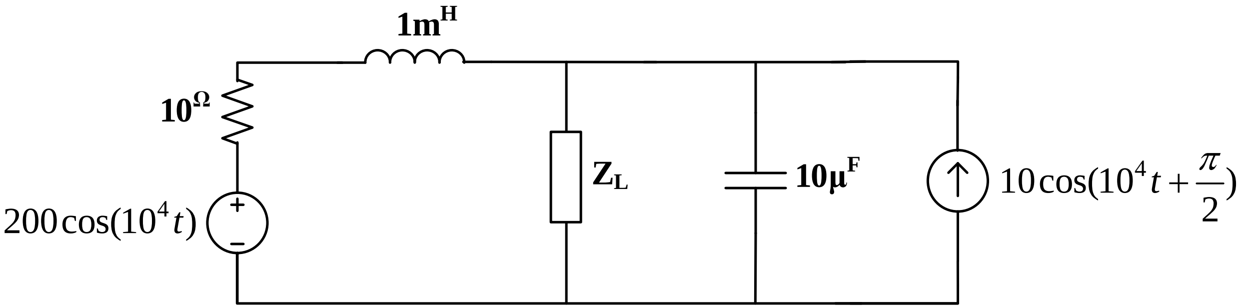
$$P_{av} = \frac{1}{2}R_L\frac{|V_S|^2}{(R_S+R_L)^2}\ ,\qquad \frac{dp_{av}}{dR_l} = \frac{1}{2}|v_s|^2\frac{(R_L + R_s)^2 - 2R_L(R_L + R_s)}{(R_L + R_s)^4} = 0 \rightarrow R_L = R_S \longrightarrow Z_L = {Z_S}^*$$

پس براساس قضیه انتقال توان ماکزیمم، وقتی $\boldsymbol{Z_L} = \boldsymbol{Z_S}^*$ حداکثر توان متوسط به آن انتقال یابد. حداکثر توان بار و منبع نیز برابرند با:

$$\left.\begin{array}{l} R_L = R_s \\ P_{av,s} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[Z_S + Z_L]|I|^2 \\ I = \frac{V_S}{Z_S + Z_L} = \frac{V_S}{2R_S} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \max P_{av,L} = \frac{|V_S|^2}{8R_S} \\ P_{av,s} = \frac{|V_S|^2}{4R_S} \end{array}\right\} \rightarrow \eta = \frac{\boldsymbol{P_{av,load}}}{\boldsymbol{P_{av,source}}} \times \mathbf{100} = \mathbf{50}\ \%$$

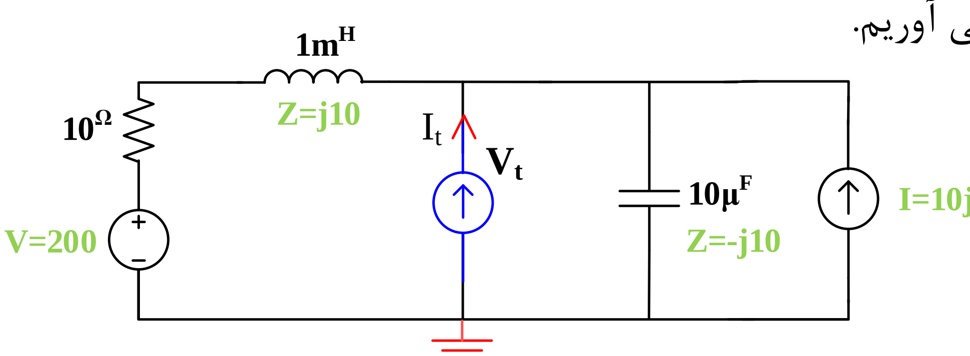
✓ در این حالت گویند امپدانس بار با امپدانس منبع بطور مزدوج **تطبیق** شده است. یا به طور ساده گوییم، بار با منبع تطبیق داده شده است (**تطبیق امپدانس**). بهره تطبیق شده توان مدار (بهره توان بار نسبت به توان منبع)، ٪۵۰ است. **Impedance Matching**

❑ **مثال)** در مدار مقابل، امپدانس بار Z_L را چنان تعیین کنید که حداکثر توان متوسط به آن انتقال یابد. مقدار توان انتقالی را محاسبه کنید.



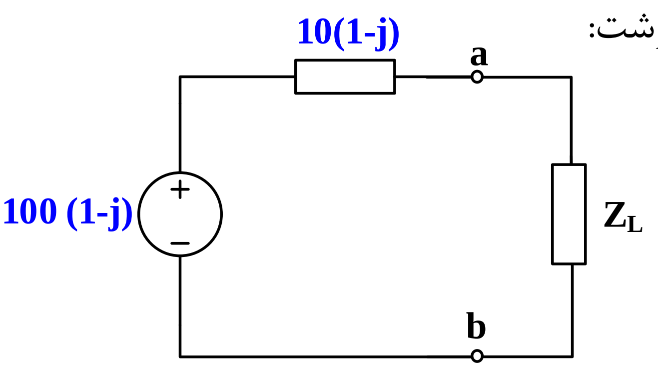
■ **حل)**

مدار معادل تونن را از دو سر بار در حوزه فیزور به دست می آوریم.



KCL: در گره منبع تست $\dfrac{(V_t-200)}{10+j10}+\dfrac{V_t}{-j10}-10j-I_t=0 \;\rightarrow V_t=100(1-j)+10(1-j)I_t$

براساس رابطه بالا، می توان ساختار مدار را به صورت زیر ارائه کرد و در نتیجه نوشت:

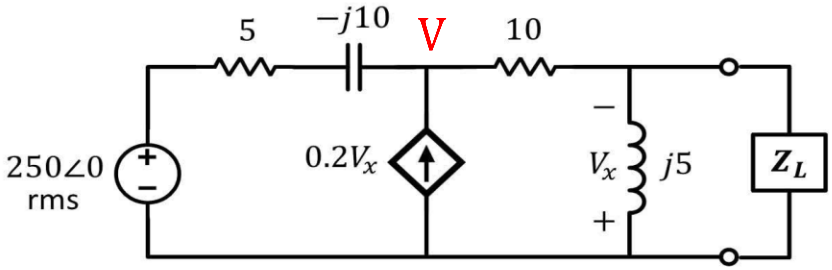


$$Z_L=Z_S{}^*=10(1+j)$$

$$P_{av}=\frac{|V_S|^2}{8R_L}=\frac{\left(100\sqrt{2}\right)^2}{8\times 10}=250\,W$$

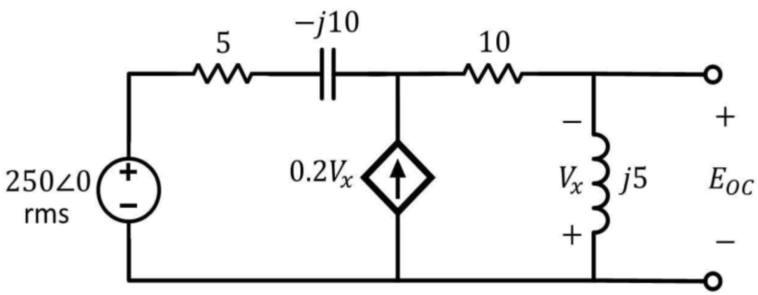
****

❑ **مثال)** در مدار شکل زیر، به ازاء چه مقدار Z_L حداکثر توان متوسط به آن انتقال داده می شود. چند درصد توان تولید شده در مدار به Z_L تحویل می شود.



■ **حل)**

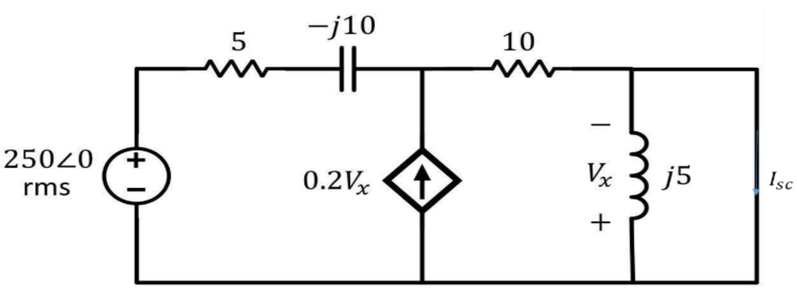
ابتدا Z_L مدار را باز کرده مدار معادل تونن دیده شده در سرهای مدار را به دست می آوریم. اعمال KCL در گره V به دست می دهد:



$$\frac{V-250}{5-j10}+\frac{V}{10+j5}-0.2\frac{-j5}{10+j5}V=0 \Rightarrow V$$

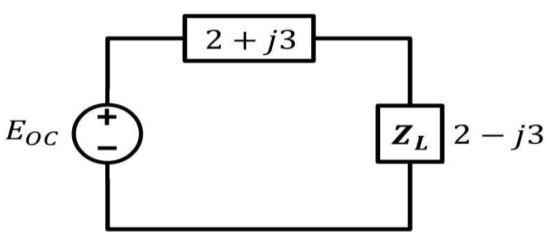
$$=10(10+j5)$$

برای محاسبه Z_{th} می توان I_{sc} را محاسبه و از $Z_{th}=\frac{E_{oc}}{I_{sc}}$ مقدار آن را حساب کرد. با اتصال کوتاه دو سر مدار، مقدار V_x صفر و منبع جریان وابسته حذف شده و داریم :



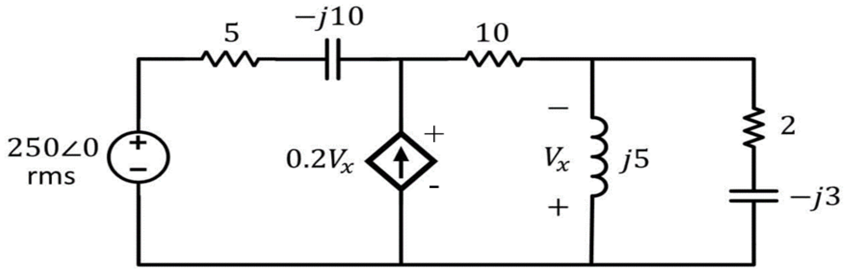
$$I_{sc}=\frac{250}{15-j10}=\frac{50}{3-j2}$$

بنابراین برای به دست آوردن مقدار مورد نظر Z_L برای انتقال حداکثر توان داریم:



$$Z_{th}=\frac{E_{oc}}{I_{sc}}=\frac{j50}{\frac{50}{3-2j}}=2+j3$$

$$Z_L={Z_{th}}^*=2-j3 \quad , \qquad I=\frac{E_{oc}}{4}=j12.5 \quad , \qquad P_{av}=|I|^2Re[z]=(12.5)^2\times 2=312.5\,W$$



برای محاسبه این که چند درصد توان تولید شده در مدار به Z_L تحویل می شود، مقدار توان تولید شده را حساب می کنیم. جریان I_1 گذرنده از بار $2-j3$ به صورت زیر به دست می آید:

$$I_1 = \frac{E_{oc}}{2+j3+2-j3} = \frac{E_s}{4} = j12.5$$

$$V_L = (2-j3)I = (2-j3)(j12.5) = 37.5 + j25$$

$$I_x = \frac{V_L}{j5} = 5 - j7.5 \ , \qquad I_2 = I_1 + I_x = j12.5 + 5 - j7.5 = 5 + j5$$

ولتاژ دو سر منبع وابسته: $V = 10I_2 + V_L = 10(5+j5) + 37.5 + j25 = 87.5 + j75$

$$V_x = -V_L = -37.5 - j25 \ \Rightarrow \ 0.2V_x = -7.5 - j5$$

$$I_3 = I_2 - 0.2V_x = 5 + j5 - (-7.5 - j5) = 12.5 + j10$$

توان تحویل داده شده توسط منبع نابسته:

S = (250)(12.5-j10) = 3125 – j2500 VA

بنابراین توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع 3125W است. درصد توان تحویل داده شده توسط منبع برابر است با:

$$\frac{312.5}{3125} = \%10$$

یعنی علیرغم انتخاب امپدانس بهینه، فقط 10% توان تولید شده توسط منبع به امپدانس بار تحویل می شود.

توضیح بیشتر: توان تحویل داده شده به منبع وابسته برابر است با:

$$S = -V.I^* = -(87.5 + j75)(-7.5 + j5) = 1031.25 + j125$$

چون جزء حقیقی آن مثبت است، پس منبع وابسته توان می گیرد. جمع توان اکتیو مصرفی مقاومت ها و منبع وابسته، برابر با توان اکتیو تولیدی منبع مستقل می باشد.

****

❖ **مقدار Q در یک مدار تشدید برحسب توان:** در مدار RLC موازی برای Q داشتیم:

$$Q = \frac{\omega_o}{2a} = \omega_0 RC$$

اگر V فیزور ولتاژ در حالت تشدید باشد:

$$Q = \omega_o \frac{\frac{1}{2}C|V|^2}{\frac{1}{2}G|V|^2}$$

عبارت $\frac{1}{2}G|V|^2$ توان متوسط تلف شده در مقاومت را در حالت تشدید نشان می دهد. می خواهیم نشان دهیم که $\frac{1}{2}C|V|^2$ انرژی کل ذخیره شده در مدار را نشان می دهد. انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازن و سلف خطی چنین است:

$$\xi_E(t) = \frac{1}{2}CV_C(t)^2 \qquad \xi_M(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

در فرکانس تشدید ω_0 ولتاژ دو سر خازن و جریان درون سلف برابرند با:

$$V_C(t) = \mathrm{Re}\,[Ve^{j\omega_o t}] = |V|cos(\omega_o t + V)$$

$$i_L(t) = Re\left[\frac{V}{j\omega_o L}.e^{j\omega_o t}\right] = \frac{|V|}{\omega_0 L}Cos(\omega_o t + \angle V - 90) = \frac{|V|}{\omega_0 L}Sin\,(\omega_0 t + \angle V)$$

انرژی کل ذخیره شده در مدار چنین است:

$$\xi(t)=\xi_E(t)+\xi_M(t) = = \frac{1}{2}C|V|^2cos^2(\omega_o t + \angle V) + \frac{1}{2}L\,\frac{|V|^2}{\omega_0^2 L^2}sin^2(\omega_o t + \angle V)$$

با توجه به این که $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ است، به دست می آوریم:

$$\xi(t)=\frac{1}{2}C|V|^2$$

بنابراین در حالت تشدید، انرژی کل ذخیره شده در سلف و خازن مقدار ثابت است و به t بستگی ندارد. در نتیجه داریم:

$$\mathbf{Q = \omega_o \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{توان متوسط تلف شده در یک مقاومت}} = 2\pi \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی تلف شده در یک سیکل}}}$$

۴–۴– نرمالیزه کردن یک مدار یا تغییر مقیاس یک مدار (Scaling)

❖ **تغییر مقیاس امپدانس ورودی:**

✓ در مدار RLC سری می دانیم که امپدانس ورودی به صورت $Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$

✓ اگر بخواهیم اندازه امپدانس ورودی را K برابر افزایش دهیم کافی است $R \to KR$ و $L \to KL$ و $C \to \frac{C}{K}$ باشد.

✓ این مطلب در حالت کلی، برای امپدانس ورودی یک مدار با هر نوع از به هم پیوستن المان های R، L و C معتبر است.

✓ **بنابراین برای آن که سطح امپدانس ورودی مداری را K برابر کنیم، لازم است که مقادیر تمام مقاومت ها و سلف ها را K برابر و مقادیر تمام خازنها را $\frac{1}{K}$ برابر کنیم.**

❖ **تغییر مقیاس فرکانس:**

✓ امپدانس یک سلف در فرکانس ω برابر $j\omega L$ است که می توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$j\omega L = j\Omega\left(\frac{\omega}{\Omega}L\right) = j\Omega\hat{L}$$

یعنی می توان با ضرب اندوکتانس L در مقدار $\frac{\omega}{\Omega}$ امپدانس سلف $\hat{L}$ را در فرکانس جدید Ω در نظر گرفت بی آن که مقدار امپدانس تغییر کند. یعنی تغییر مقیاس فرکانس دادیم.

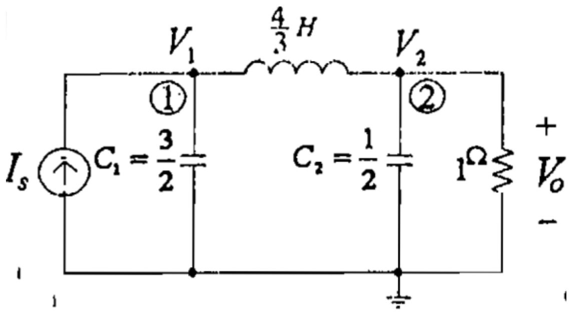
به طریق مشابه در مورد یک خازن داریم:

$$\frac{l}{j\omega C} = \frac{l}{j\Omega\left(\frac{\omega}{\Omega}C\right)} = \frac{l}{j\Omega\hat{C}}$$

✓ یعنی می توان با ضرب ظرفیت C خازن در مقدار $\frac{\omega}{\Omega}$ امپدانس خازن $\hat{C}$ را در فرکانس جدید Ω در نظر گرفت بی آن که مقدار امپدانس تغییر کند. یعنی تغییر مقیاس فرکانس دادیم.

✓ **بنابراین، اگر مدار داده شده N رفتار خاصی در فرکانس ω داشته باشد، می توان با ضرب تمام سلف ها و خازن ها در عدد $\frac{\omega}{\Omega}$ و ثابت نگه داشتن مقاومت ها، مداری به دست آورد که در یک فرکانس جدید Ω همان رفتار مدار قبلی را در فرکانس نشان دهد (تغییر مقیاس فرکانسی).**

❑ یعنی اگر مهندسی در بایگانی خود مثلاً طرح نرمالیزه یک فیلتر میان گذر را داشته باشد، او در حقیقت مقادیر اجزاء هر فیلتر میان گذری از این نوع با هر سطح امپدانس و هر فرکانس میانی دلخواه در اختیار دارد و کافی است در مدار مورد نظر خود، یک تغییر مقیاس سطح امپدانس و یک تغییر مقیاس سطح فرکانس انجام دهد.



❑ **مثال)** رفتار فیلتری مدار شکل مقابل و فرکانس قطع آن را تعیین کنید؟ اگر بخواهیم سطح امپدانس ۶۰۰ برابر و فرکانس قطع جدید $\Omega = 2\pi \times 3500$ باشد، مقادیر جدید المان ها را تعیین کنید؟

■ **حل)**

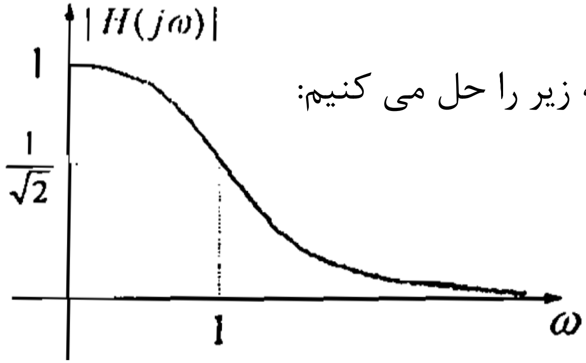
KCL در گره ۱: $j\omega\frac{3}{2}V_1 + \frac{V_1 - V_2}{j\omega\frac{4}{3}} = I_s$

KCL در گره ۲: $j\omega\frac{1}{2}V_2 + V_2 + \frac{V_2 - V_1}{j\omega\frac{4}{3}} = 0$

از حل این دو معادله بر حسب V_2 بدست می آوریم:

$$V_o = V_2 = \frac{\frac{3}{j\omega 4}}{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\omega^2 + \frac{3}{2}j\omega + \frac{3}{j\omega 4}} I_s \Longrightarrow \mathrm{H}(j\omega) = \frac{V_0}{I_s} = \frac{1}{(1-2\omega^2) + j\omega(2-\omega^2)}$$

$$=>|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2 + \omega^2(2-\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^6}}$$



با توجه به شکل پاسخ فرکانسی، مدار فیلتر پایین گذر است. برای تعیین فرکانس قطع، معادله زیر را حل می کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega^6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \omega = 1$$

اگر بخواهیم سطح امپدانس را 600 برابر کنیم، باید تمام مقاومت ها و سلف ها را در 600 و خازن ها را در $\frac{1}{600}$ ضرب کنیم.

اگر بخواهیم فرکانس قطع $2\pi \times 3500$ باشد باید تمام سلف ها و خازن ها بر عدد $2\pi \times 3500$ تقسیم شود.

بنابراین در مدار نرمالیزه خواهیم داشت:

$$R^* = 1 \times 600 = 600^{\Omega}$$

$$L^* = \frac{4}{3} \times 600 \times \frac{1}{2\pi \times 3500} = \frac{4}{35\pi} = 36.27^{mH}$$

$$C_1^* = \frac{3}{2} \times \frac{1}{600} \times \frac{1}{2\pi \times 3500} = 0.1137^{\mu F}$$

$$C_2^* = \frac{1}{2} \times \frac{1}{600} \times \frac{1}{2\pi \times 3500} = 0.0379^{\mu F}$$

****

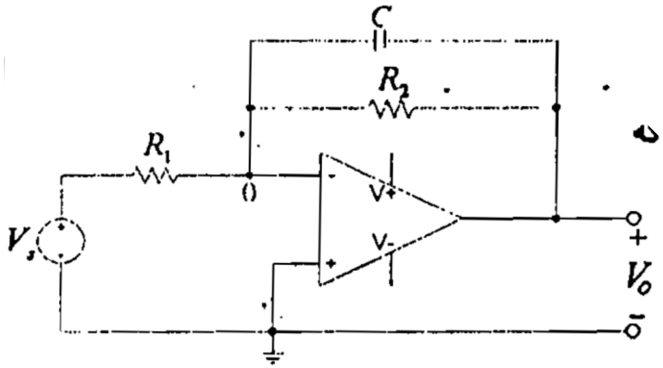
❖ **تغییرمقیاس مدارشامل منابع وابسته:** چهار نوع منبع وابسته به شرح زیر است:

۱ – منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ: یعنی $v = a\, v_x$. در این شرایط α بدون دیمانسیون است. بنابراین در تغییر مقیاس سطح امپدانس، α تغییر نمی کند و به فرکانس هم وابسته نیست.

۲ – منبع ولتاژ کنترل شده با جریان: $v = \beta\, i_x$. در این شرایط β دارای دیمانسیون مقاومت است. بنابراین اگر قرار باشد سطح امپدانس را k برابر کنیم، β نیز باید k برابر شود.

۳ – منبع جریان کنترل شده با ولتاژ: $i = \gamma\, v_x$. در این شرایط γ دارای دیمانسیون عکس مقاومت یا رسانایی است. بنابراین اگر قرار باشد سطح امپدانس را k برابر کنیم، باید γ را $\frac{1}{k}$ برابر کنیم.

۴ – منبع جریان کنترل شده با جریان: $i = \delta i_x$. در این شرایط δ بدون دیمانسیون است. بنابراین در تغییر مقیاس سطح امپدانس δ تغییر نمی کند.



❑ **مثال)** در مدار شکل مقابل، مقادیر R_1 و R_2 و C را چنان تعیین کنید که رفتار مدار، یک فیلتر پایین گذر با بهره واحد و فرکانس قطع $\omega = 1$ باشد. مدار را چنان تغییر مقیاس دهید که بهره آن در باند گذر، برابر ۵ بوده و فرکانس قطع آن 1000Hz و مقدار خازن C برابر 0.01µF باشد.

■ **حل)**

$$\frac{V_s}{R_1} + \frac{V_o}{R_2} + j\omega C V_o = 0$$

$$\frac{V_o}{V_s} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + j\omega C R_2} \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{V_o}{V_s}\right| = |H(j\omega)| = \frac{\frac{R_2}{R_1}}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}}$$

مقدار بهره فیلتر پایین گذر، $\frac{R_2}{R_1}$ است. برای آن که بهره برابر ۱ باشد، باید $R_1 = R_2 = R$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{1}{RC}$$

برای آن که فرکانس قطع $\omega = \frac{1}{RC} = 1$ باشد، می توان $C = 1$ و $R_1 = R_2 = 1$ انتخاب کرد.

برای آن که فرکانس قطع 1000Hz یا $2\pi \times 1000$ رادیان بر ثانیه باشد، لازم است خازن C به مقدار $\frac{1}{2\pi \times 1000}$ تغییر کند.

$$\text{ظرفیت جدید} = 0.01 \times 10^{-6} = \frac{1}{k} \times \frac{1}{2\pi \times 1000} \times 1$$

K **ضریب تغییر امپدانس** است که از این جا تعیین می شود:

$$k = \frac{1}{2\pi \times 10^{-5}} = 15915.5$$

در این صورت، مقدار جدید R_2 برابر با $R_2 = 15915.5$ خواهد بود.

برای داشتن بهره باند گذر برابر با ۵ (یعنی $\frac{R_2}{R_1}$)، چون R_2 را نمی توانیم تغییر دهیم، کافی است R_1 را ۵ برابر کوچک کنیم. یعنی:

$$R_1 = \frac{1}{5} \times 15915.5 = 3183.1\ \Omega$$

****