فصل ۲:

مدارهای مقاومتی و روش های تحلیل مدارهای فشرده

۲-۱- شبکه تک قطبی و مفهوم معادل بودن دو مدار؛

۲-۲- ترکیب سری و موازی المان های فشرده مداری؛

- اتصال سری و موازی مقاومت ها؛
- اتصال سری و موازی خازن ها؛
- اتصال سری و موازی القاگرها؛

۲-۳- روش های تحلیل مدارهای مقاومتی؛

- روش تحلیل گره؛
- روش تحلیل مش؛
- انتخاب روش تحلیل مناسب؛

۲-۴- قضایای مهم مدارهای **LTI**؛

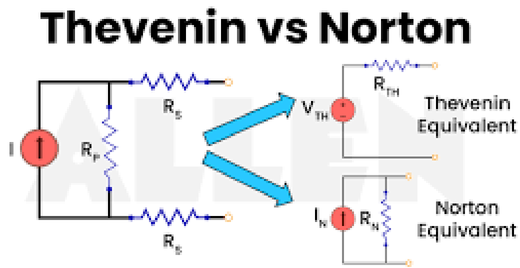
- مدارهای معادل تونن و نرتن؛
- قضیه جمع آثار؛
- قضیه جانشینی؛
- قضیه تلگان؛
- استفاده از تقارن در تحلیل مدارها؛

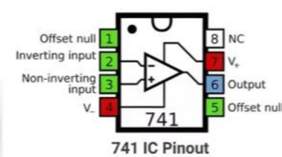
۲-۵- حل مدارهای غیرخطی؛

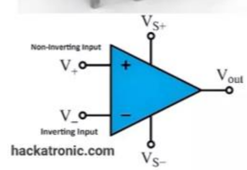
۲-۶- معرفی تقویت کننده عملیاتی (**Op-Amp**) و تحلیل مدارهای دارای **Op-Amp**؛

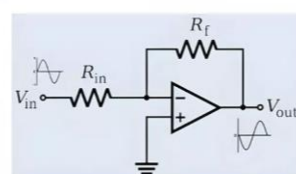
Elements Symbol	RESISTOR	CAPACITOR	INDUCTOR
Denoted by	R	C	L
Equation	$R=\frac{V}{I}$	$C=\frac{Q}{V}$	$L=\frac{V_L}{(di/dt)}$
Series	$R_T=R_1+R_2$	$\frac{1}{C_T}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$	$L_T=L_1+L_2$
Parallel	$\frac{1}{R_T}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$	$C_T=C_1+C_2$	$\frac{1}{L_T}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$

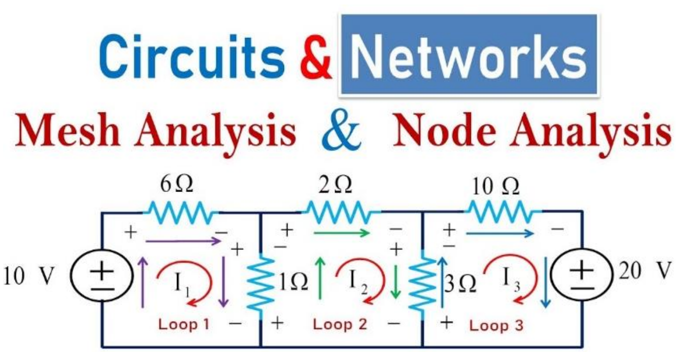
www.electricaltechnology.org





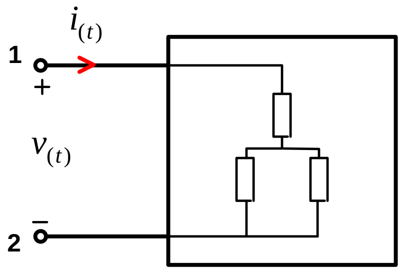




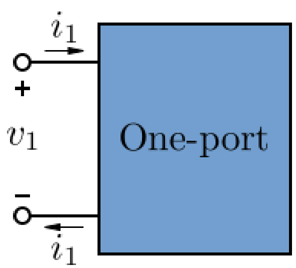


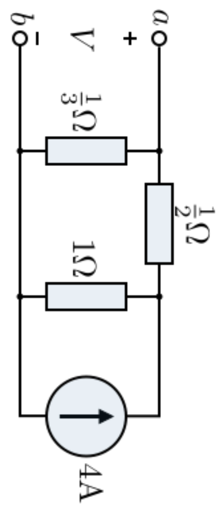
۲–۱– شبکه تک قطبی و مفهوم معادل بودن دو مدار

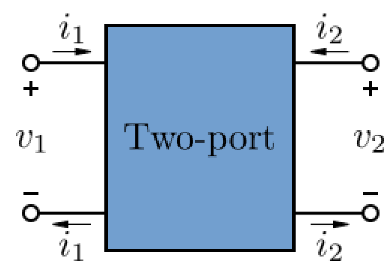
- در این فصل تحلیل مدارهای ساده مقاومتی آموزش داده می شود. منظور از تحلیل یک مدار، محاسبه ولتاژ و جریان تمام شاخه های مدار و یا برخی از شاخه های مدار است. **ولتاژ و جریان شاخه ها، متغیرهای شبکه نامیده می شوند.**

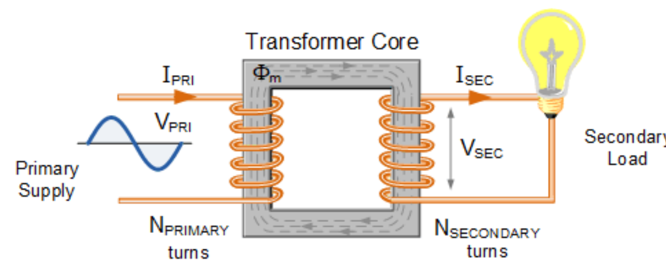


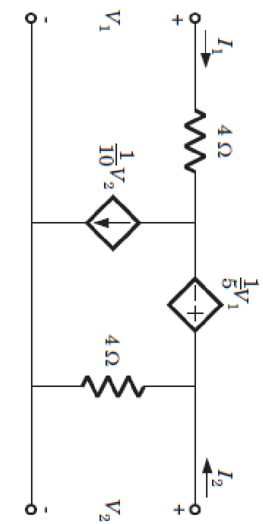
- **تک قطبی:** مدار یا المان دو سری است که فقط بر حسب ولتاژ و جریان دو سر قطب توصیف می شود. شرط یک قطبی آن است که در هر لحظه از زمان، جریان وارد شده به سر اول با جریان خارج شده از سر دوم مساوی باشد. تک قطبی می تواند یک مدار پیچیده و یا یک المان دو سر ساده مانند مقاومت باشد و شاخص اصلی آن، بیان روابط ولتاژ و جریان از دو سر مذکور، فارغ از محتوی داخل آن می باشد.

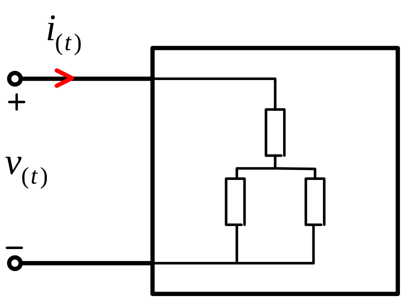


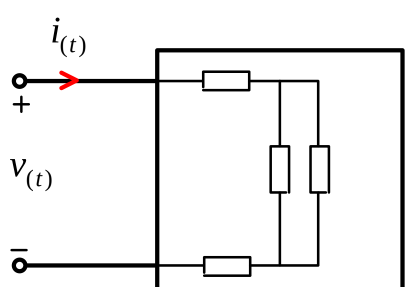




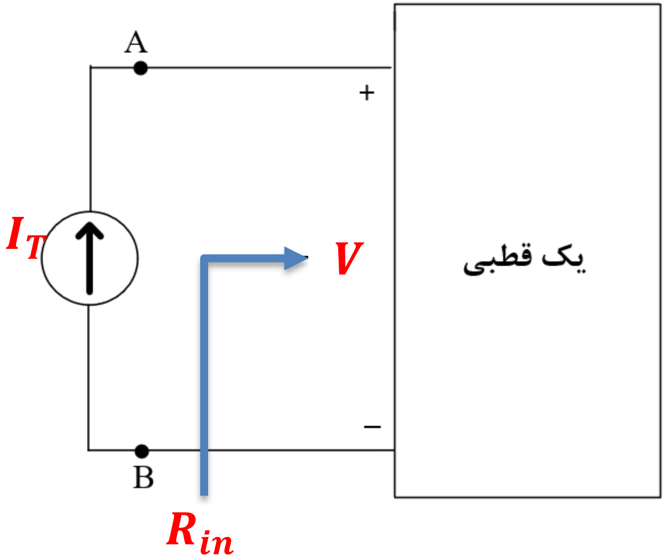








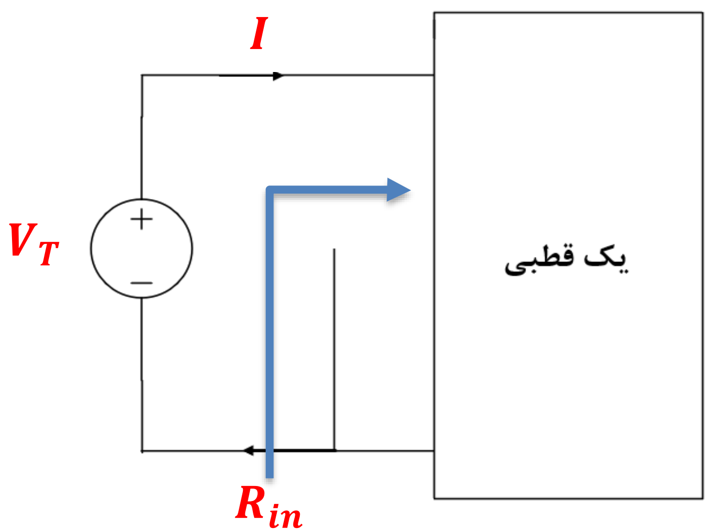
- **مفهوم معادل بودن دو شبکه تک قطبی:** مدارهای یک قطبی را وقتی معادل گویند که مشخصه آنها بر حسب ولتاژ و جریان قطب همواره یکی باشد.



❑ **تعیین مقاومت ورودی تک قطبی:** برای تعیین مقاومت ورودی یک یک قطبی منابع نابسته درون یک قطبی را برابر صفر قرار داده و جریان آزمایشی I_T را اعمال می‌کنیم و ولتاژ V در دو سر یک قطبی را تعیین می‌کنیم. مقاومت ورودی یک قطبی از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$R_{in} = \frac{V}{I_T}$$

❖ **توجه:** برای صفر کردن یک منبع ولتاژ آنرا اتصال کوتاه و برای صفر کردن یک منبع جریان آن را مدار باز می‌کنیم.

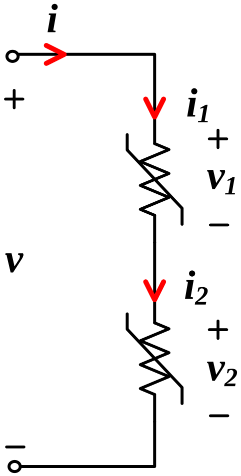


✓ راه دیگر این است که منبع ولتاژ آزمایشی V_T را در سر های یک قطبی وصل و جریان I وارد شونده به یک قطبی را تعیین کنیم. مقاومت ورودی یک قطبی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R_{in} = \frac{V_T}{I}$$

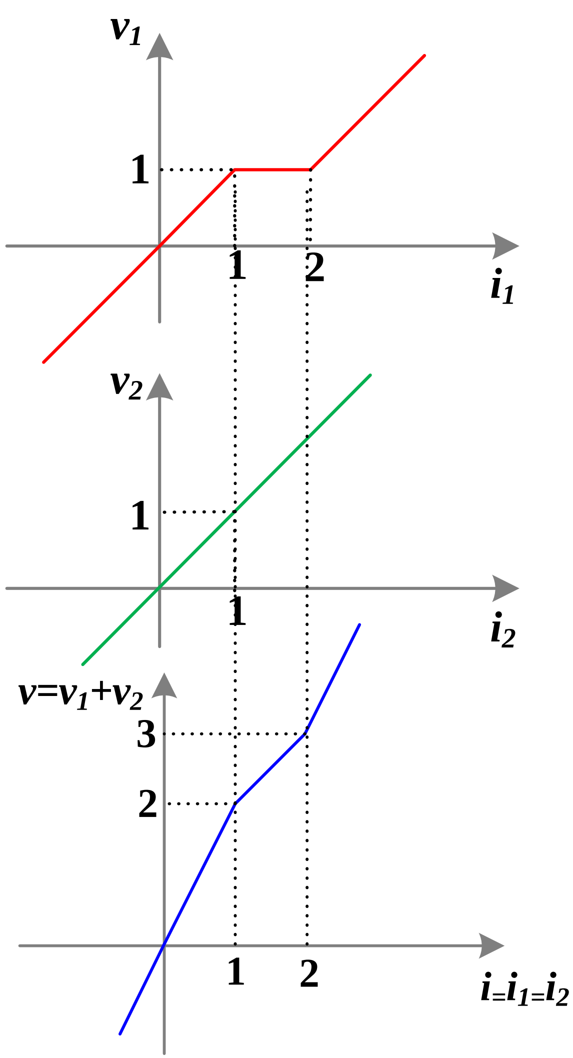
۲–۲– ترکیب سری و موازی المان های فشرده مداری

– اتصال سری و موازی مقاومت ها



- **اتصال سری مقاومت ها:** در اتصال سری، محدودیت های KVL و KCL به این صورت است که جریان ها یکسان بوده و ولتاژها با یکدیگر در ازای جریان های یکسان جمع می شوند.

$$KCL: i = i_1 = i_2$$
$$KVL: v = v_1 + v_2$$



✓ **از نظر تحلیلی، مشخصه مقاومت معادل اتصال سری دو مقاومت را فقط زمانی که هر دو کنترل شده با جریان باشند، می توان معین کرد:**

$$\begin{cases} v_1 = f_1(i_1) \\ v_2 = f_2(i_2) \end{cases} \xrightarrow[\text{KCL و KVL}]{\text{اعمال محدویت}} \left.\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 \\ &= f_1(i_1) + f_2(i_2) \\ &= f_1(i) + f_2(i) \\ \\ v &= f(i) \end{aligned}\right\} \quad v = f(i) = f_1(i) + f_2(i)$$

✓ طبیعتاً برای این که بتوان در هر جریان، ولتاژها را با هم جمع کرد، تابع ولتاژ برحسب جریان باید یک به یک باشد. به بیان دیگر، در ازای هر مقدار جریان، المان مربوطه باید صرفاً یک مقدار ولتاژ داشته باشیم. در این حالت گوییم مقاومت کنترل شده با جریان است. یعنی **اتصال سری دو مقاومت کنترل شده با جریان یک مقاومت کنترل شده با جریان است.**

✓ اتصال سری m مقاومت کنترل شده با جریان معادل یک مقاومت کنترل شده با جریان است که:

$$f(i) = \sum_{k=1}^{m} f_k(i) \xrightarrow{\text{در حالت خطی}} \boldsymbol{R = \sum_{k=1}^{m} R_k}$$

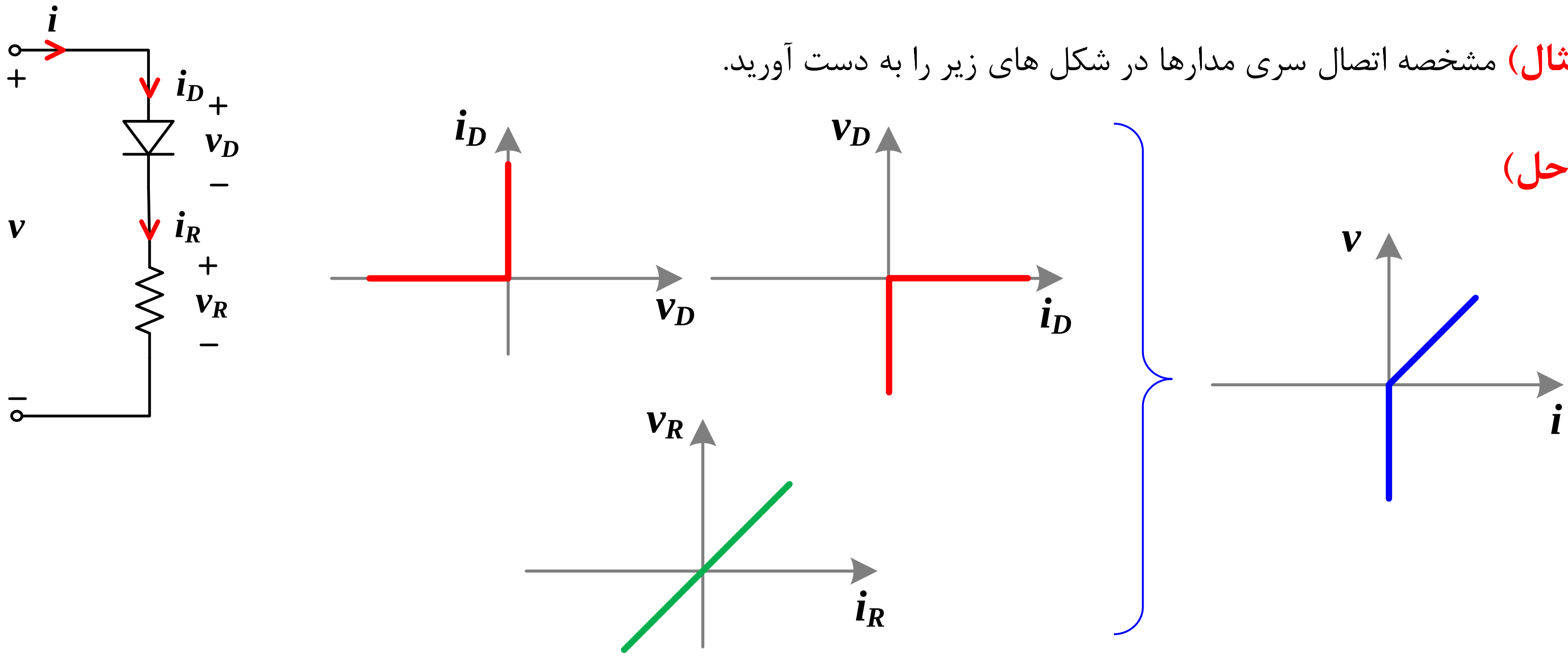
$$\text{در حالت اتصال سری منابع ولتاژ} \longrightarrow \boldsymbol{v = \sum_{k=1}^{m} v_k}$$

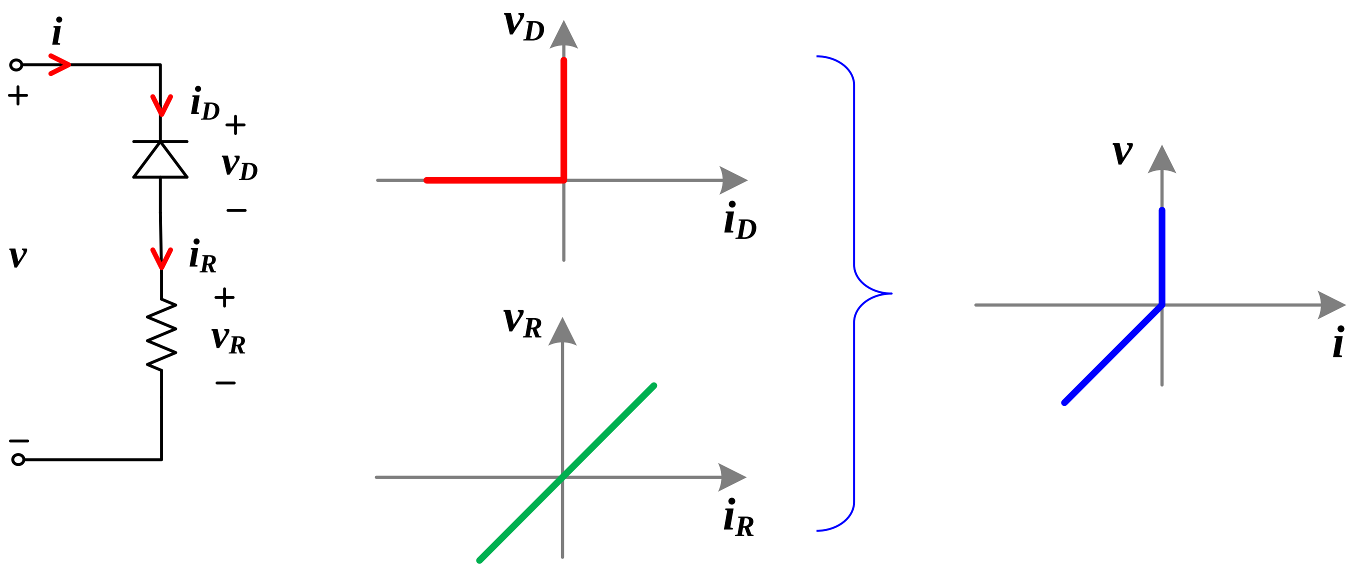
❖ **اتصال سری دو منبع جریان تنها وقتی امکان پذیر است که جریان دو منبع مساوی باشد.**

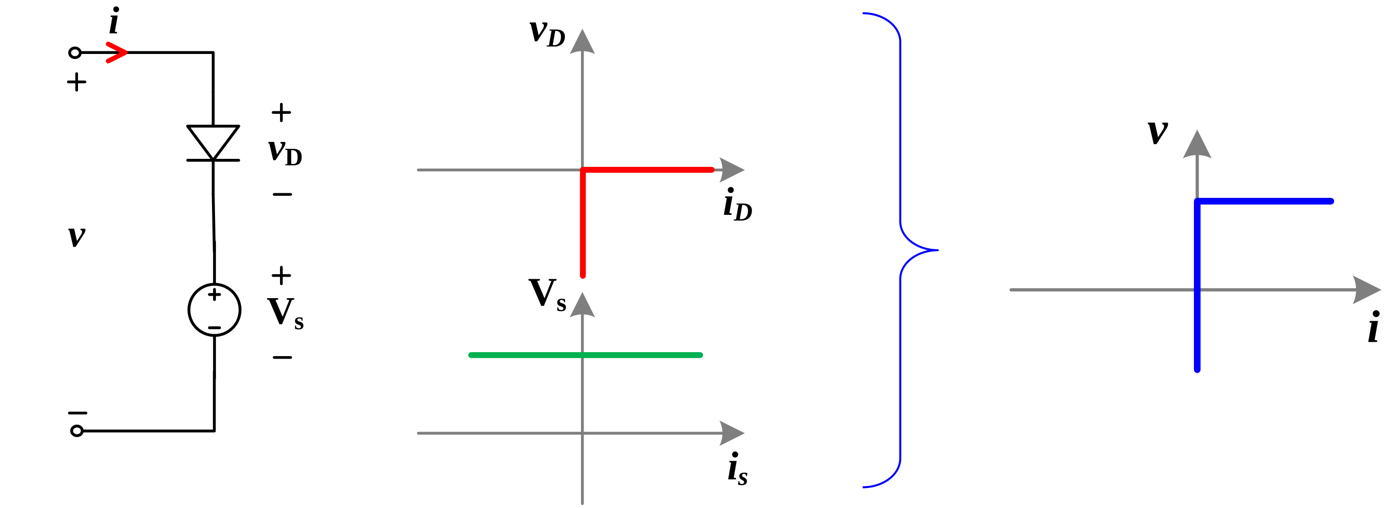
❖ **اتصال سری منبع جریان با هر المان دیگر، معادل منبع جریان با همان مقدار است.**

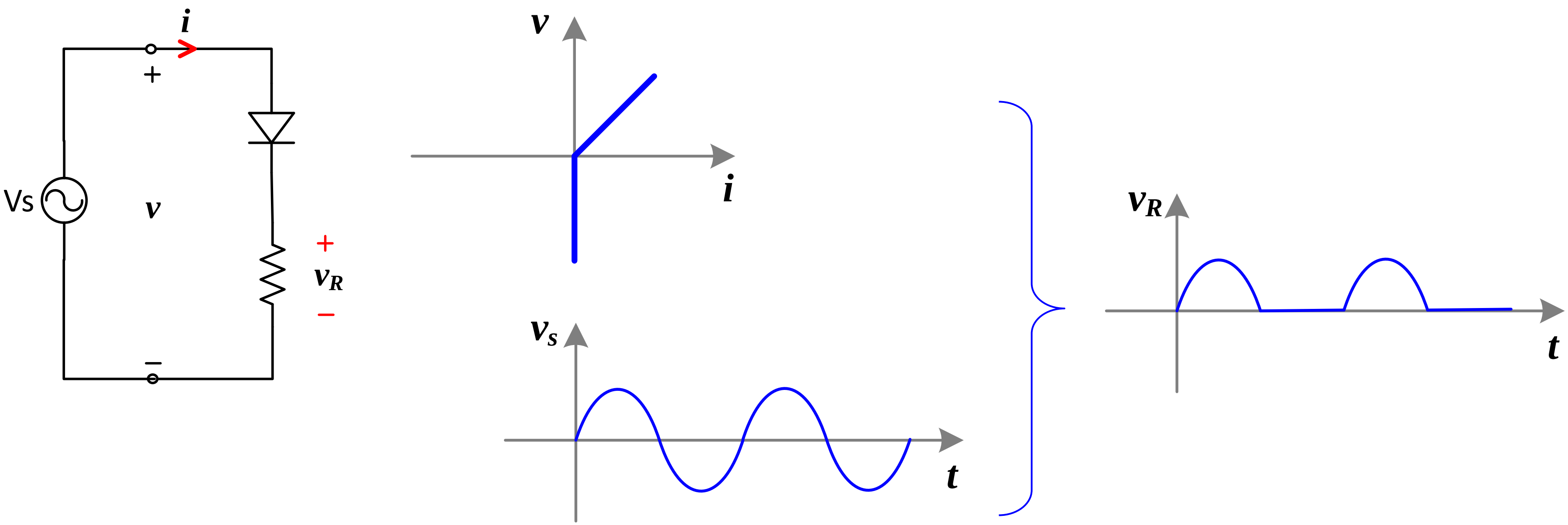
❑ **مثال)** مشخصه اتصال سری مدارها در شکل های زیر را بدست آورید.

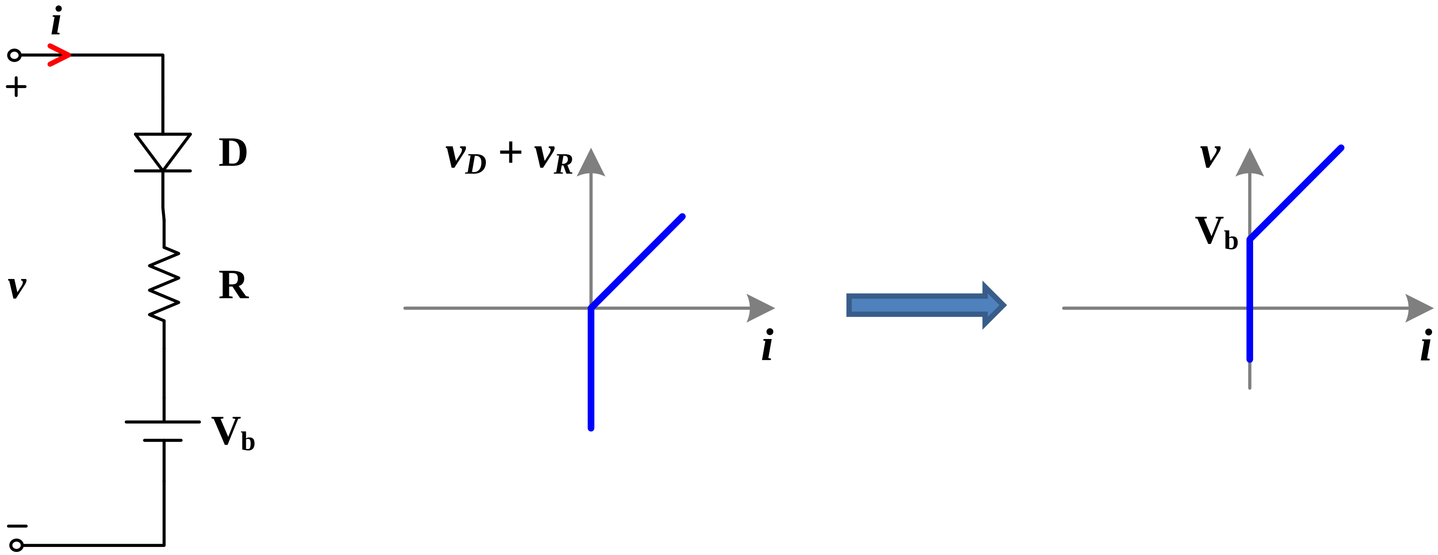
■ **حل)**

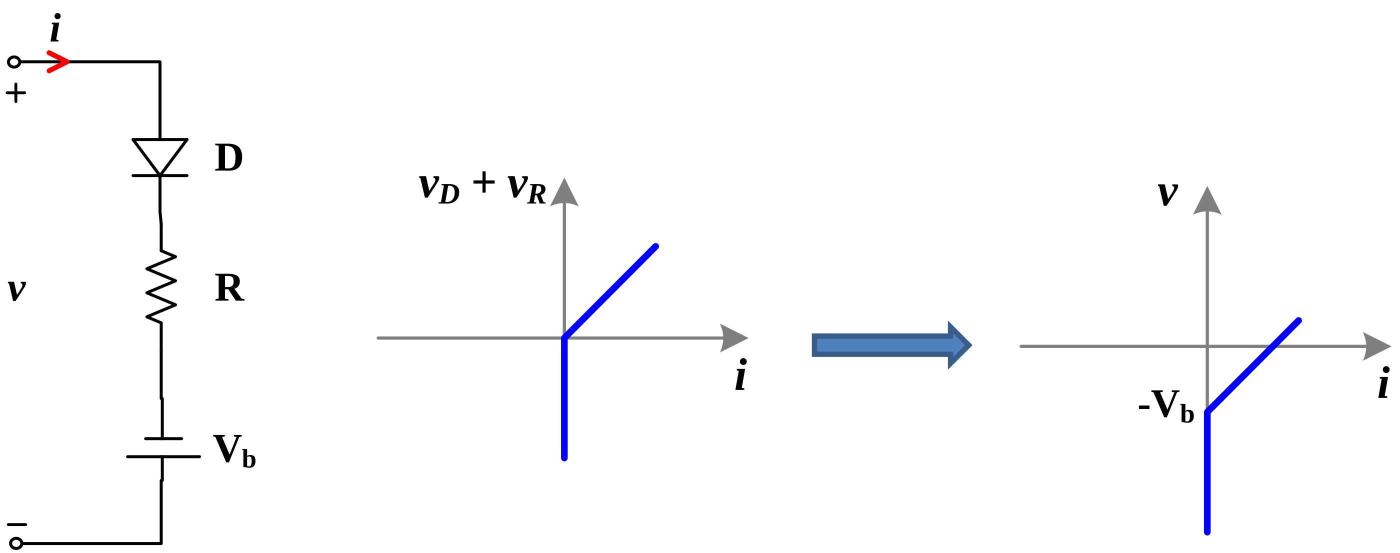




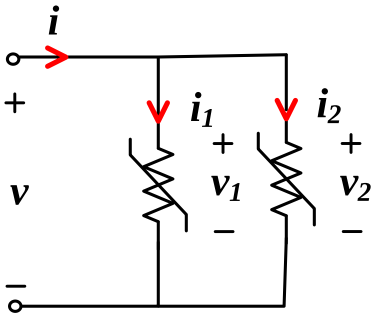

i
+
−
v
+
vD
−
+
Vs
−
vD
iD
Vs
is
v
i


i
+
−
Vs
v
+
vR
−
v
i
vs
t
vR
t


i
+
D
R
v
Vb
−
vD + vR
i
v
Vb
i

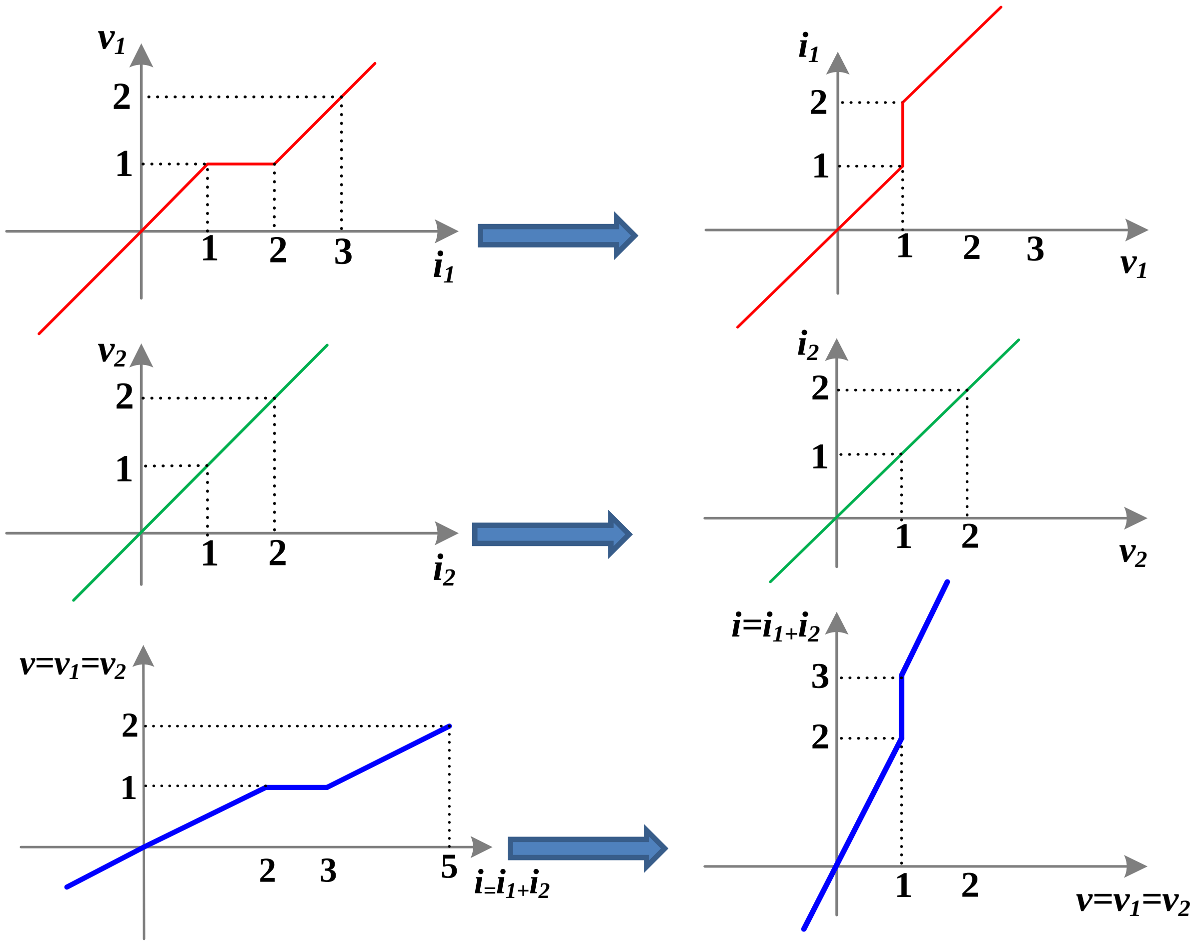

i
+
D
R
v
Vb
−
vD + vR
i
v
-Vb
i

****



❑ **اتصال موازی مقاومت ها:** در اتصال موازی، محدودیت های KVL و KCL به این صورت است که ولتاژها یکسان بوده و جریان ها با یکدیگر در ازای ولتاژهای یکسان جمع می شوند.

$$\begin{cases} KVL:\ v = v_1 = v_2 \\ KCL:\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

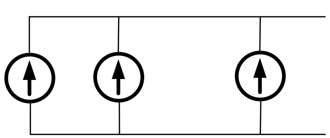


- از نظر تحلیلی، مشخصه مقاومت معادل اتصال موازی دو مقاومت را فقط زمانی که هر دو کنترل شده با ولتاژ باشند، می توان معین کرد:

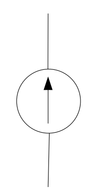
$$\begin{cases} i_1 = g_1(v_1) \\ i_2 = g_2(v_2) \end{cases} \xrightarrow[\text{KCL و KVL}]{\text{اعمال محدودیت}} \left. \begin{array}{l} i = i_1 + i_2 \\ \quad = g_1(v_1) + g_2(v_2) \\ \quad = g_1(v) + g_2(v) \\ \\ i = g(v) \end{array} \right\} \quad i = g(v) = g_1(v) + g_2(v)$$

- طبیعتاً برای این که بتوان در هر ولتاژ، جریان ها را با هم جمع کرد، تابع جریان برحسب ولتاژ باید یک به یک باشد. به بیان دیگر، در ازای هر مقدار ولتاژ، المان مربوطه باید صرفاً یک مقدار جریان داشته باشیم. در این حالت گوییم مقاومت کنترل شده با ولتاژ است. یعنی **اتصال موازی دو مقاومت کنترل شده با ولتاژ یک مقاومت کنترل شده با ولتاژ است.**
- اتصال موازی m مقاومت کنترل شده با ولتاژ، معادل یک مقاومت کنترل شده با ولتاژ است که:

$$g(v) = \sum_{k=1}^{m} g_{\mathrm{k}}(v) \xrightarrow{\text{در حالت خطی}} \boldsymbol{G = \sum_{k=1}^{m} G_k}$$

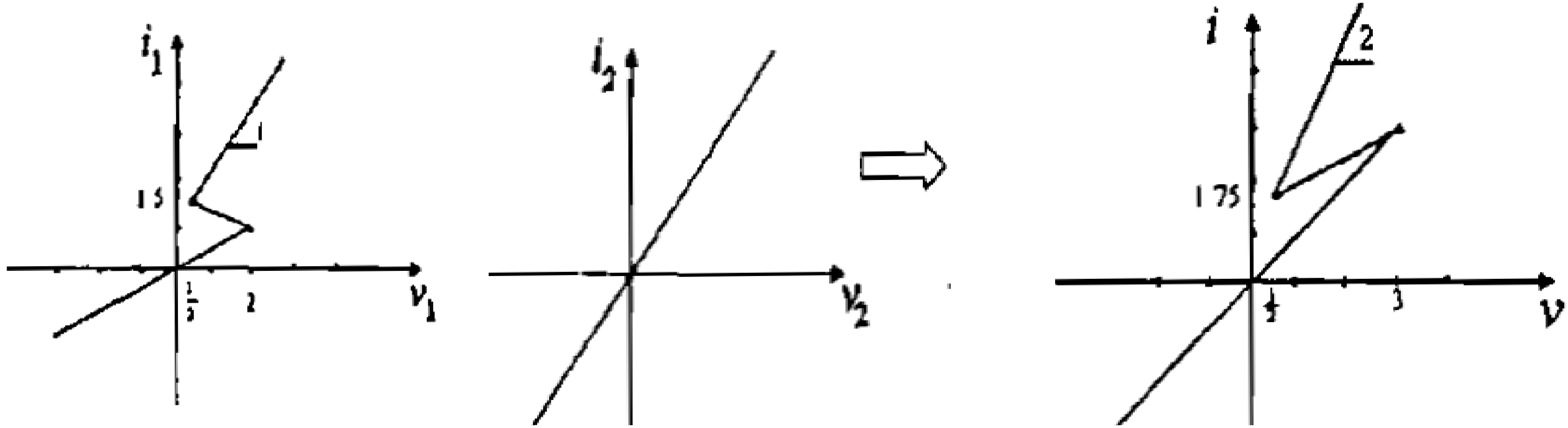


$$\xrightarrow{\text{در حالت اتصال موازی منابع جریان}} \boldsymbol{i = \sum_{k=1}^{m} i_k}$$



- **اتصال موازی دو منبع ولتاژ تنها وقتی امکان پذیر است که ولتاژ دو منبع مساوی باشد.**
- **اتصال موازی منبع ولتاژ با هر المان دیگر، معادل منبع ولتاژ با همان مقدار است.**

❖ **توجه:** اتصال موازی دو مقاومت کنترل شده با جریان لزوماً یک مقاومت کنترل شده با جریان نیست. به‌عنوان مثال:



❑ **مثال)** مشخصه اتصال موازی دو مقاومت توصیف شده با معادلات زیر را به دست آورید.

$$i_1 = v_1 + sin\, v_1$$
$$i_2 = v_2 + sin\, v_2$$

■ **حل)**

$$\text{i} = i_1 + i_2 = v_1 + sin\, v_1 + v_2 - sin\, v_2$$

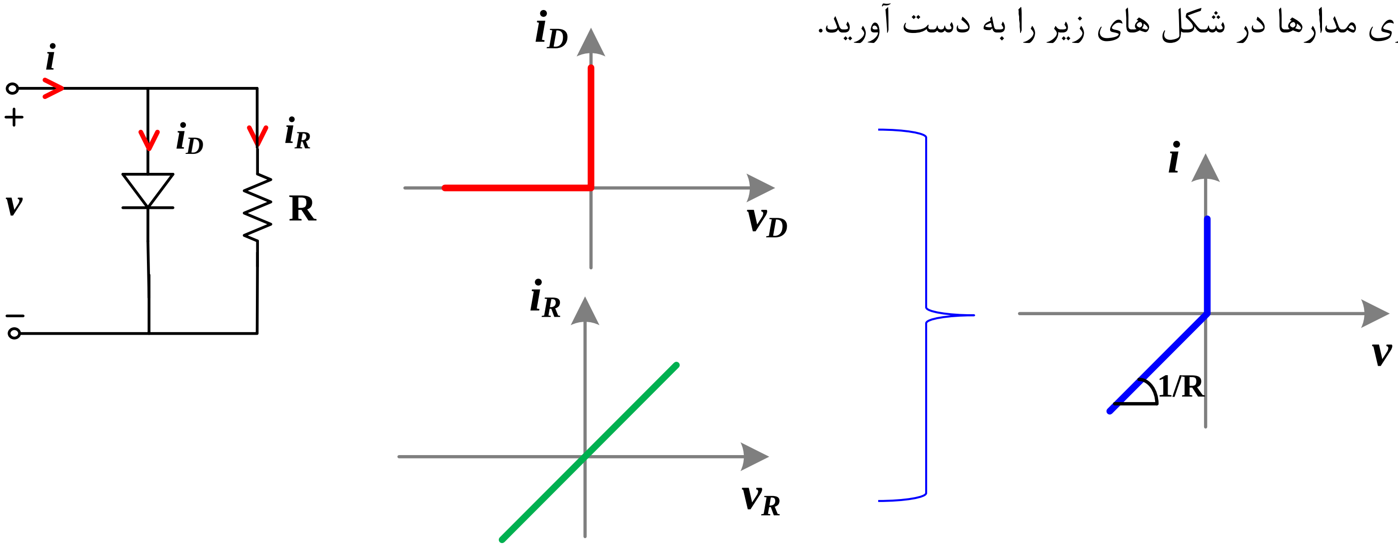
چون $v_1 = v_2 = v$ است پس

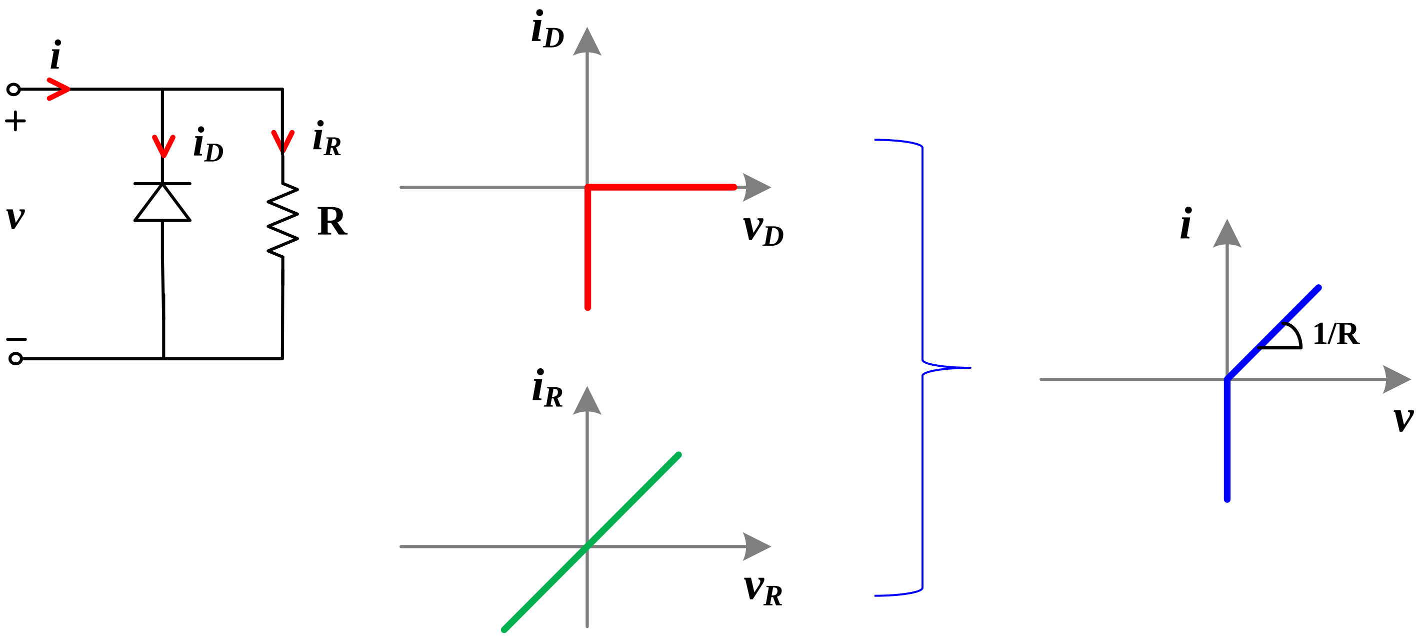
$$\text{i} = 2v$$

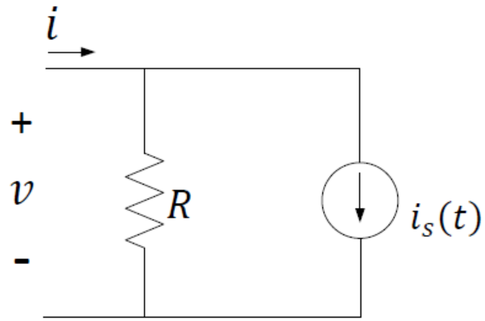
****

❑ **مثال)** مشخصه اتصال سری مدارها در شکل های زیر را به دست آورید.

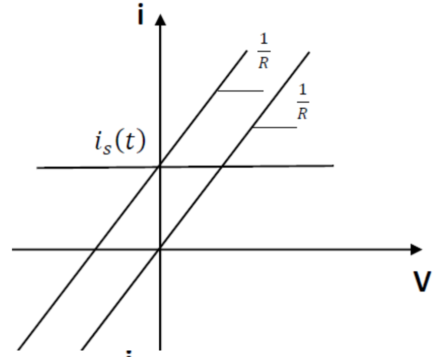
■ **حل)**



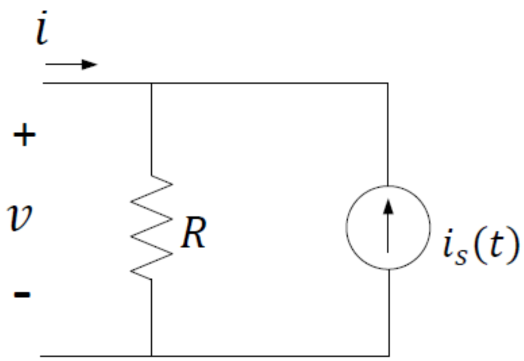




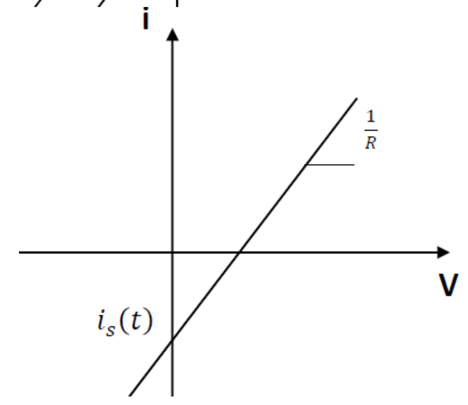
i
+
v
-
R
$i_s(t)$



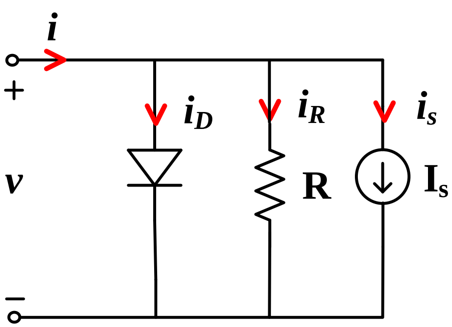
i
$\frac{1}{R}$
$\frac{1}{R}$
$i_s(t)$
V



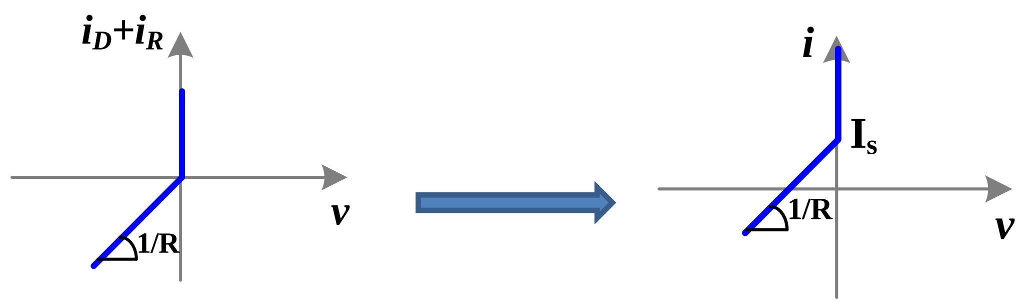
i
+
v
-
R
$i_s(t)$



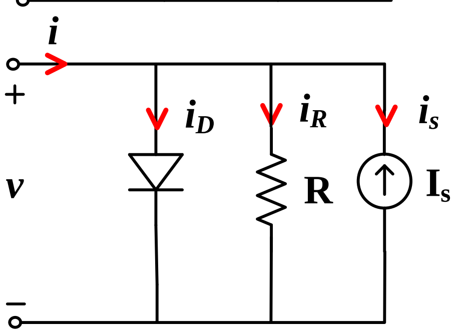
i
$\frac{1}{R}$
V
$i_s(t)$



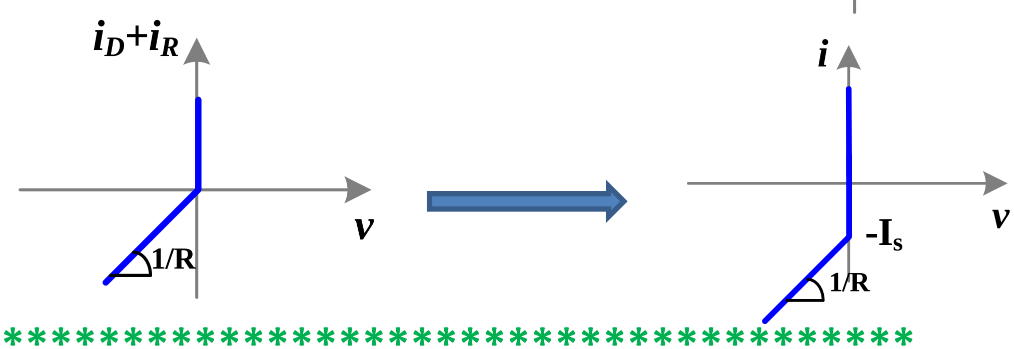
i
+
v
−
i_D
i_R
i_s
R
I_s



i_D+i_R
1/R
v
i
I_s
1/R
v



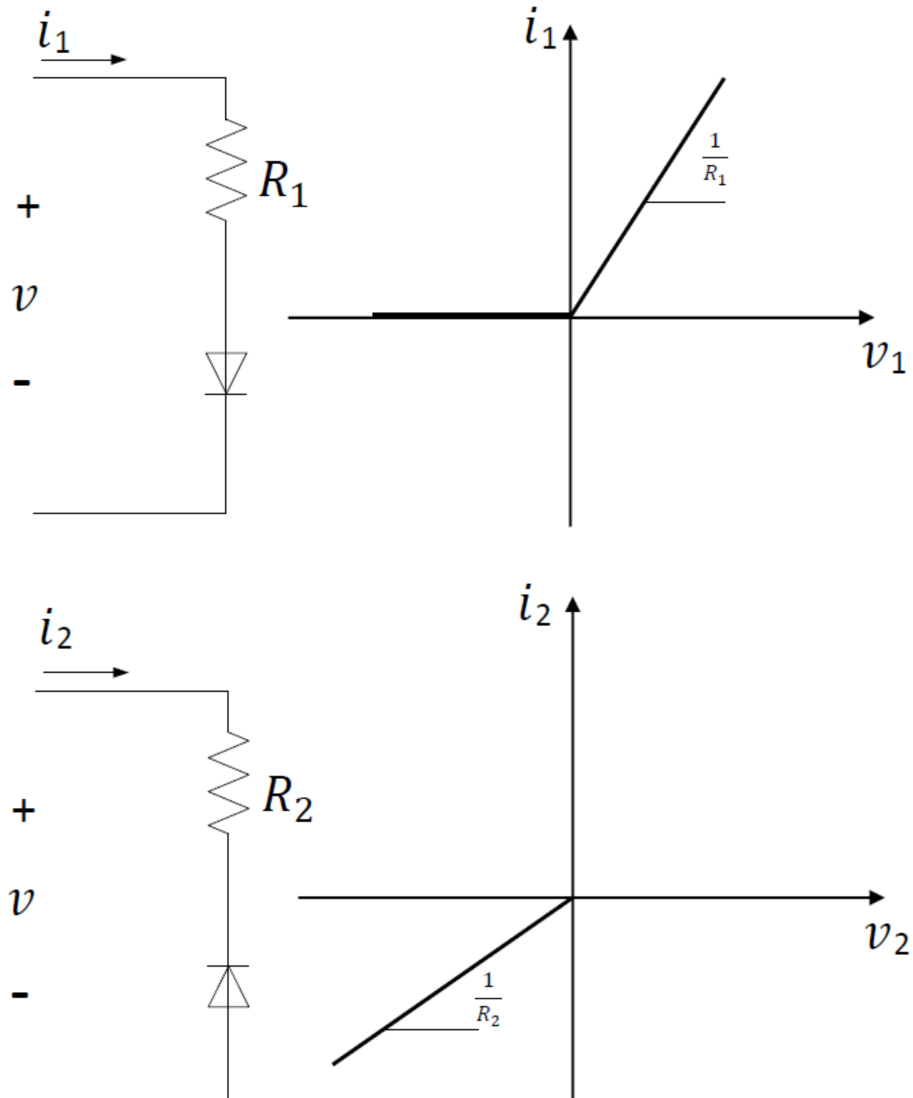
i
+
v
−
i_D
i_R
i_s
R
I_s

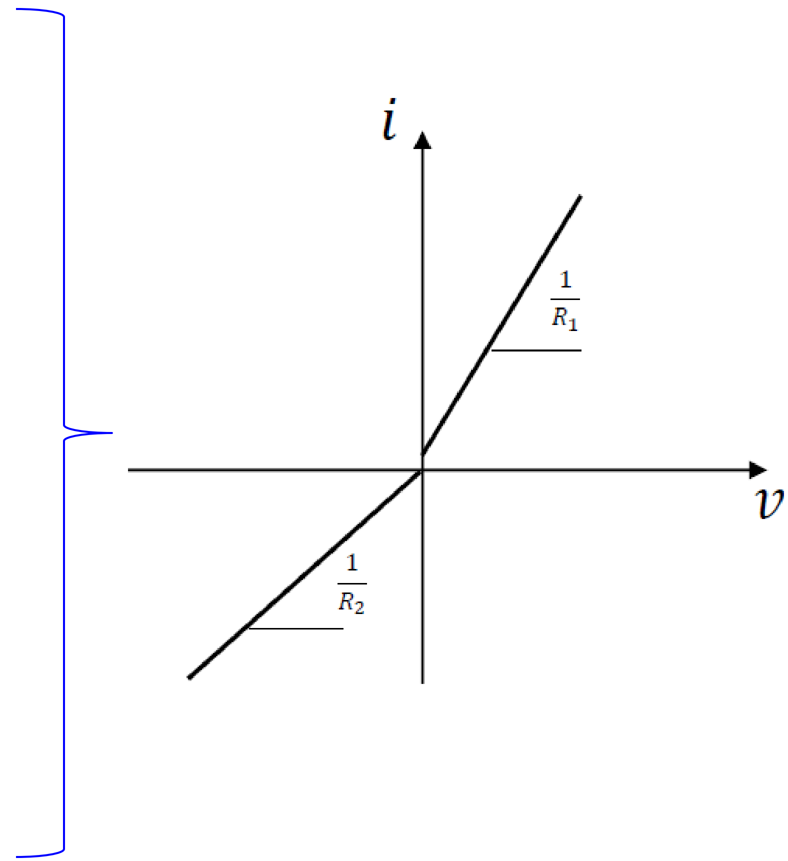


i_D+i_R
1/R
v
i
$-I_s$
1/R
v

❑ **مثال)** مشخصه vi ناشی از اتصال موازی دو مدار سری زیر چگونه است و مشابه با چه المانی است؟

■ **حل)**

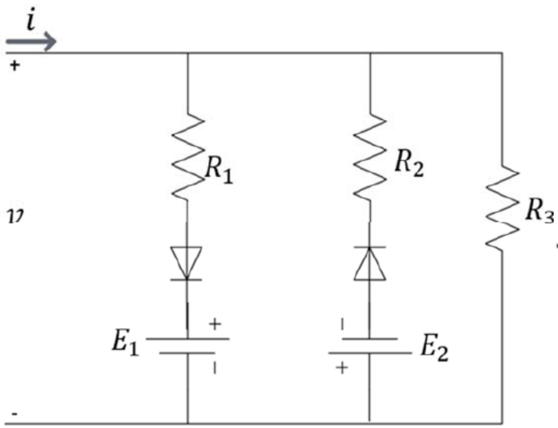




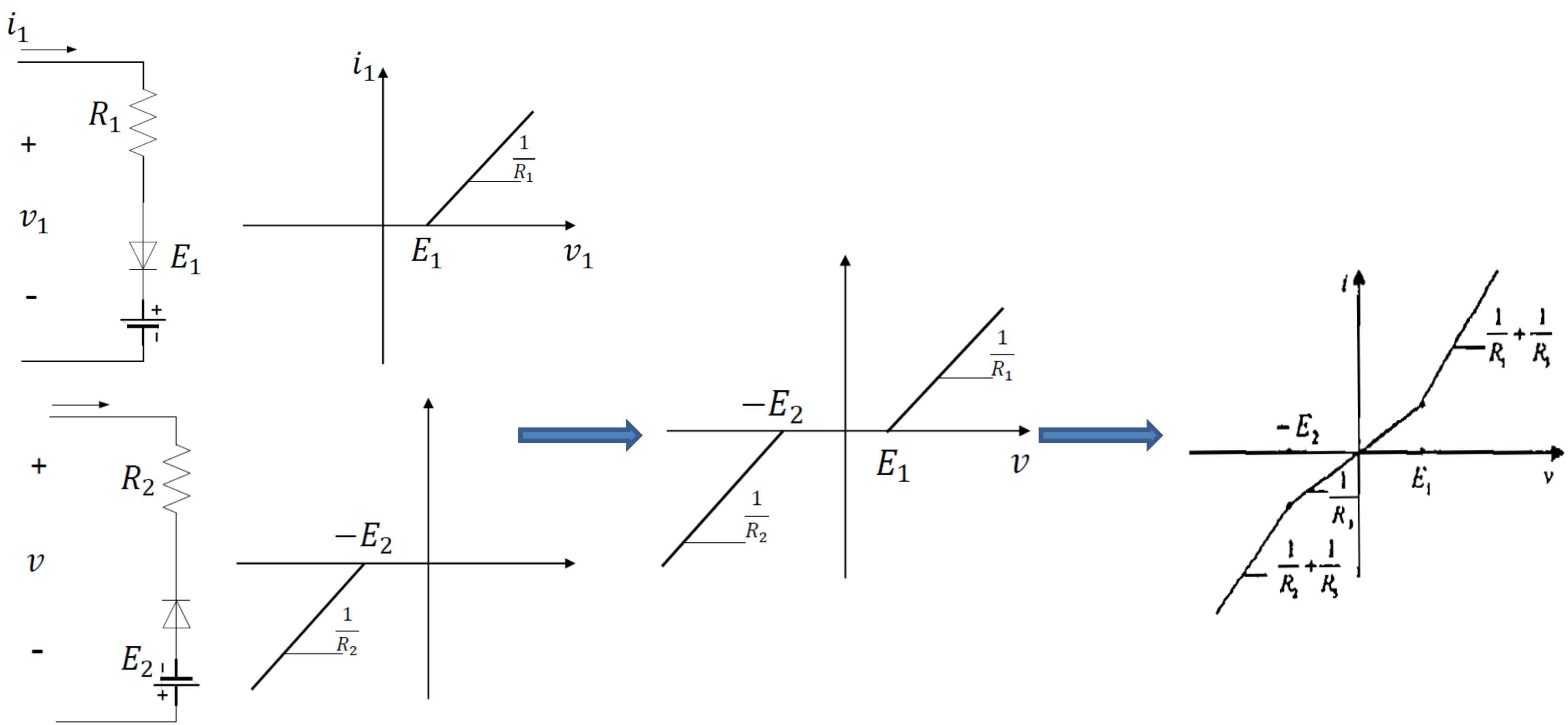
این مشخصه شبیه تقریب خطی تکه‌ای مشخصه دیود فیزیکی است.

****

❑ **مثال)** مشخصه vi مدار زیر چگونه است؟



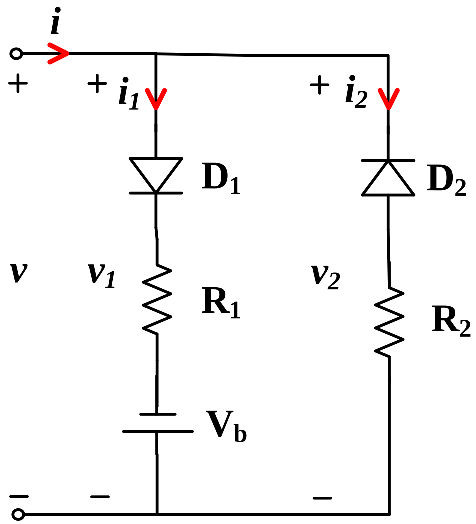
■ **حل)**

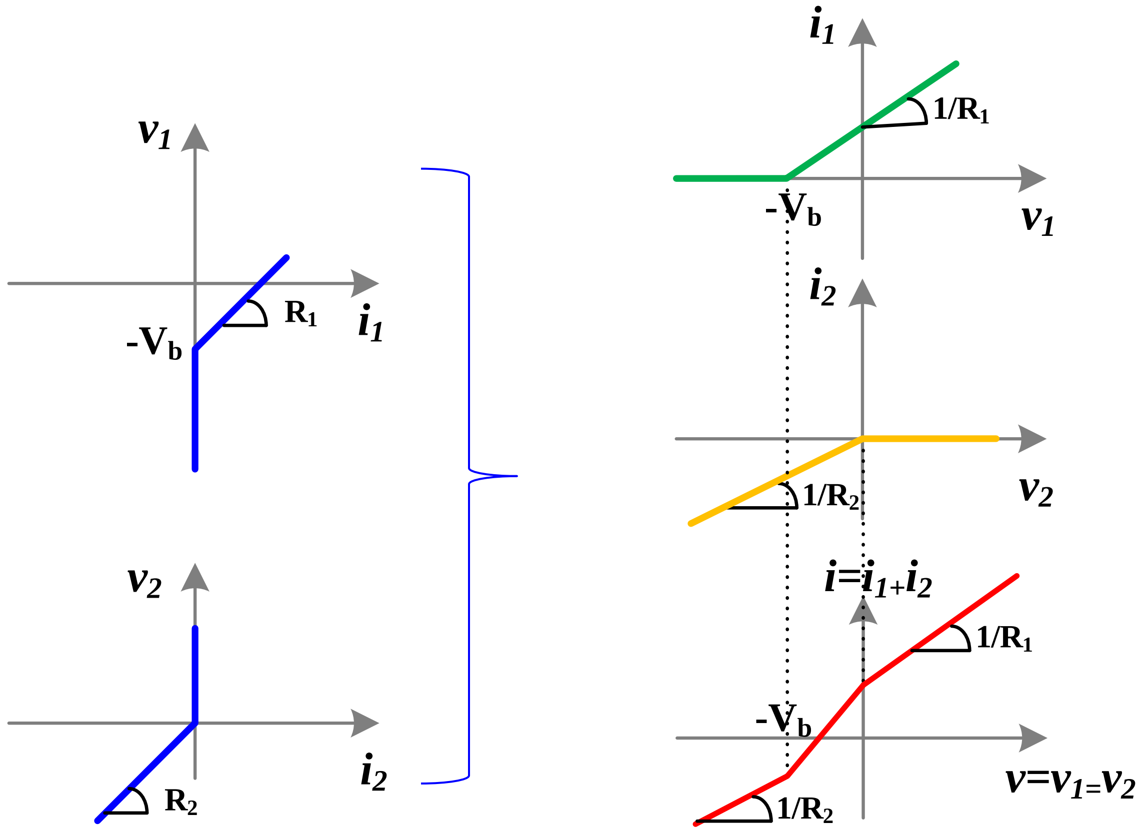


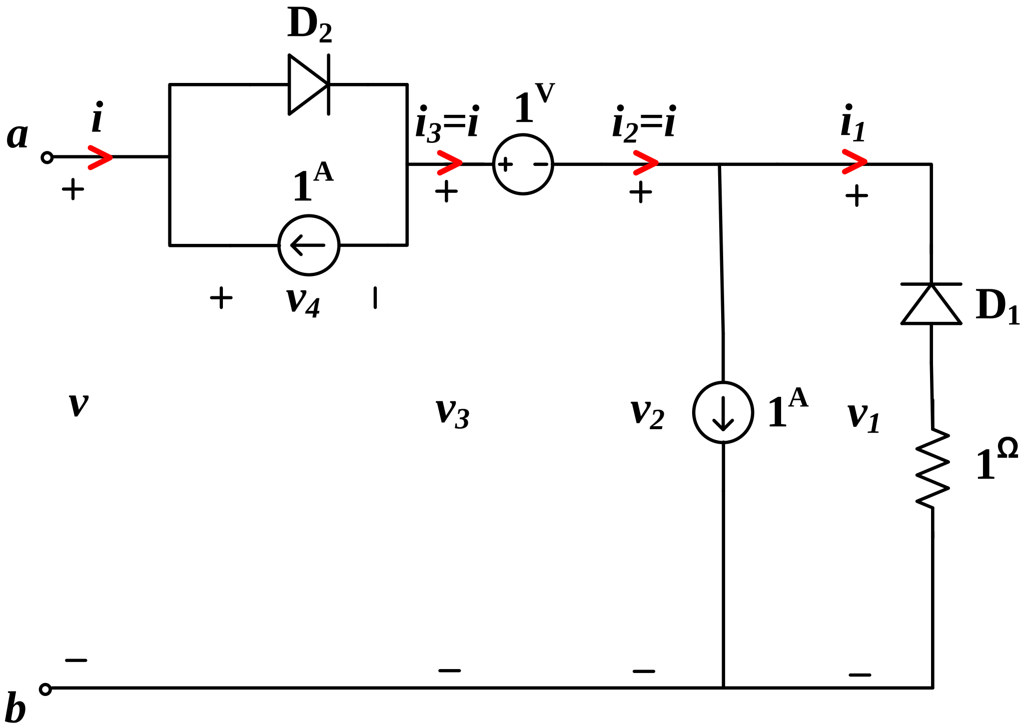
****

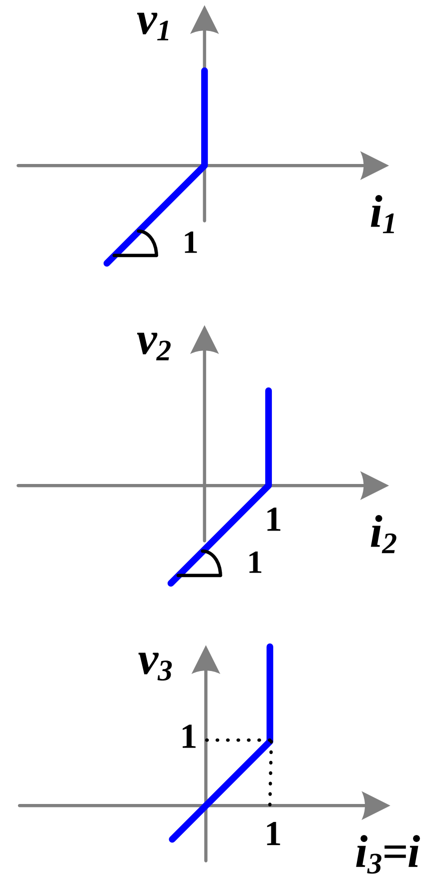
❑ **مثال)** مشخصه اتصال سری ـ موازی مدارها در شکل های زیر را به دست آورید.

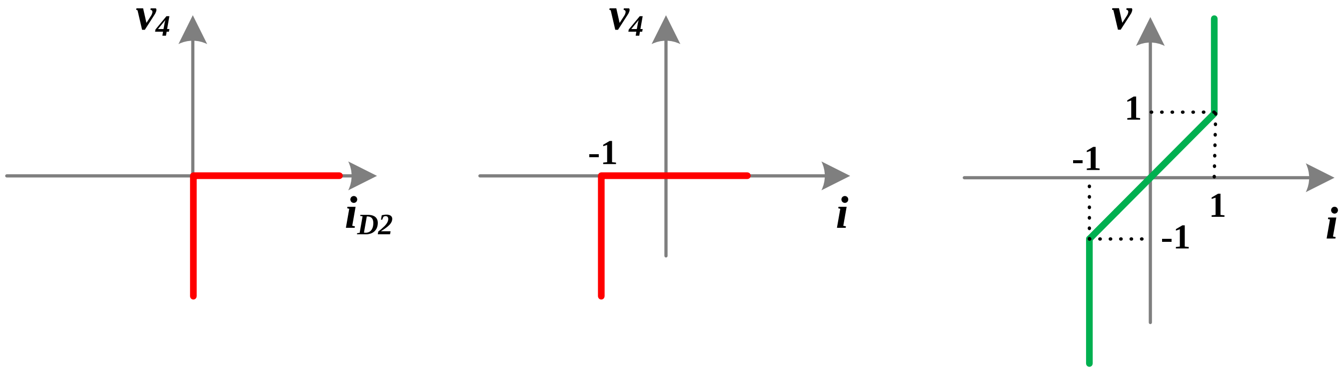
■ **حل)**





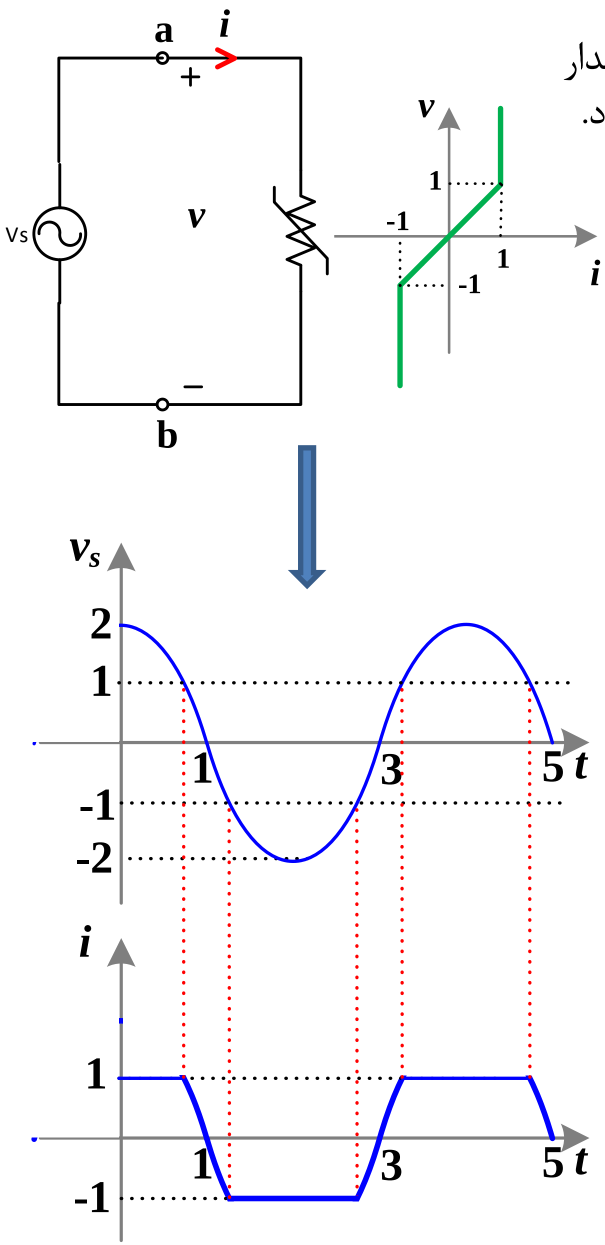

D2
a
b
i
$i_3=i$
1^V
$i_2=i$
i_1
1^A
v_4
D1
1^Ω
v
v_3
v_2
v_1


v_1
i_1
1
v_2
i_2
1
1
v_3
1
1
$i_3=i$


v_4
i_{D2}
v_4
-1
i
v
1
-1
1
-1
i

****

❑ **مثال)** اگر در مثال قبل، سرهای a و b را به یک منبع ولتاژ با مقدار $v_s(t)=2\cos(\pi/2t)$ متصل نماییم، شکل موج جریان عبوری از آن چگونه خواهد بود.



■ **حل)**

تا وقتی که $v(t) \geq 1$ باشد، $i(1) = 1$ خواهد بود.

$$2\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi t}{2} = \frac{\pi}{3} \rightarrow t = \frac{2}{3}$$

یعنی برای $0 \leq t \leq \frac{2}{3}$ داریم: $i(t) = 1$

تا وقتی که $-1 \leq v(t) \leq 1$ باشد، $i(t) = v(t)$ خواهد بود.

$$2\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi t}{2} = \frac{\pi}{3} \rightarrow t = \frac{4}{3}$$

یعنی برای $\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{4}{3}$ داریم: $i(t) = -1$

تا وقتی که $v(t) < -1$ باشد، $i(t) = -1$ خواهد بود.

$$2\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = -1 \rightarrow \left(\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} \rightarrow t = \frac{8}{3}$$

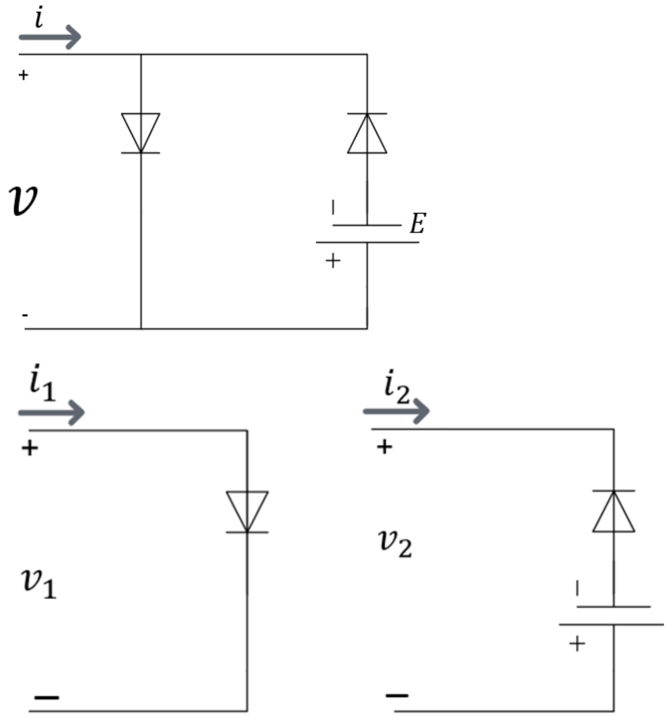
یعنی برای $\frac{4}{3} \leq t \leq \frac{8}{3}$ داریم: $i(t) = -1$

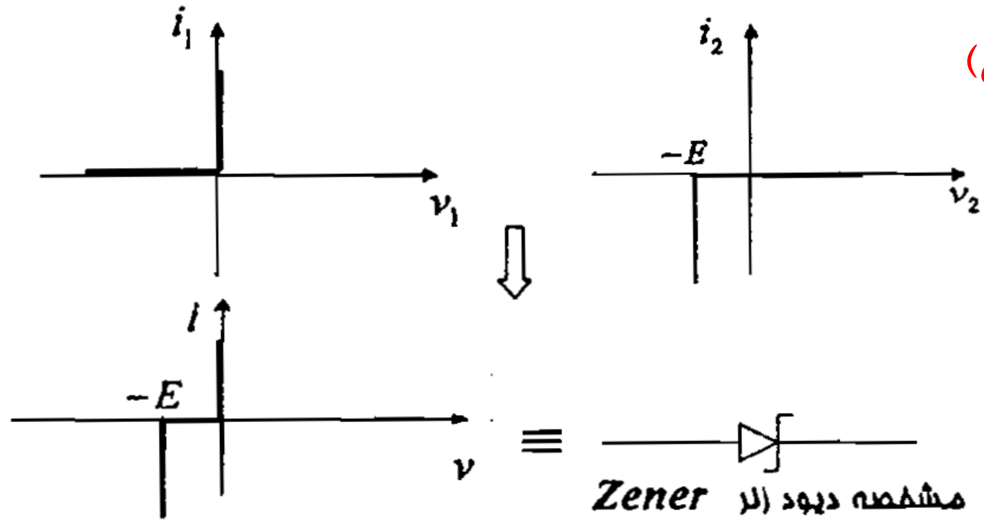
به طریق مشابه، برای $\frac{8}{3} \leq t \leq \frac{10}{3}$، $i(t) = v(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ و بعد از آن شکل موج تکرار می‌شود.

****

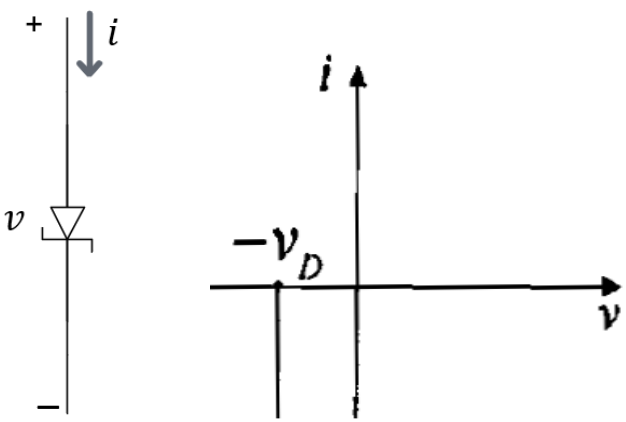
❑ **مثال) دیود زنر:** مشخصه مدار در شکل زیر را به دست آورید.

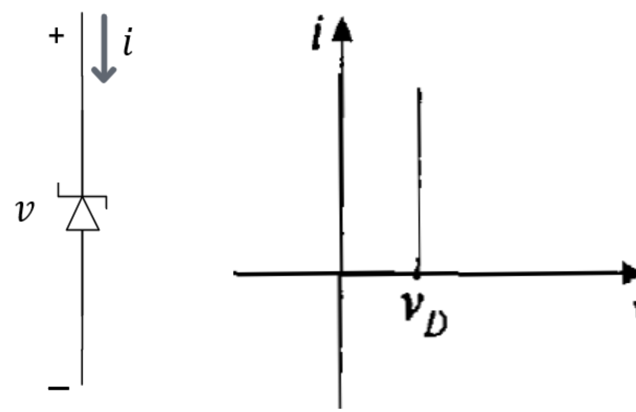
■ **حل)**

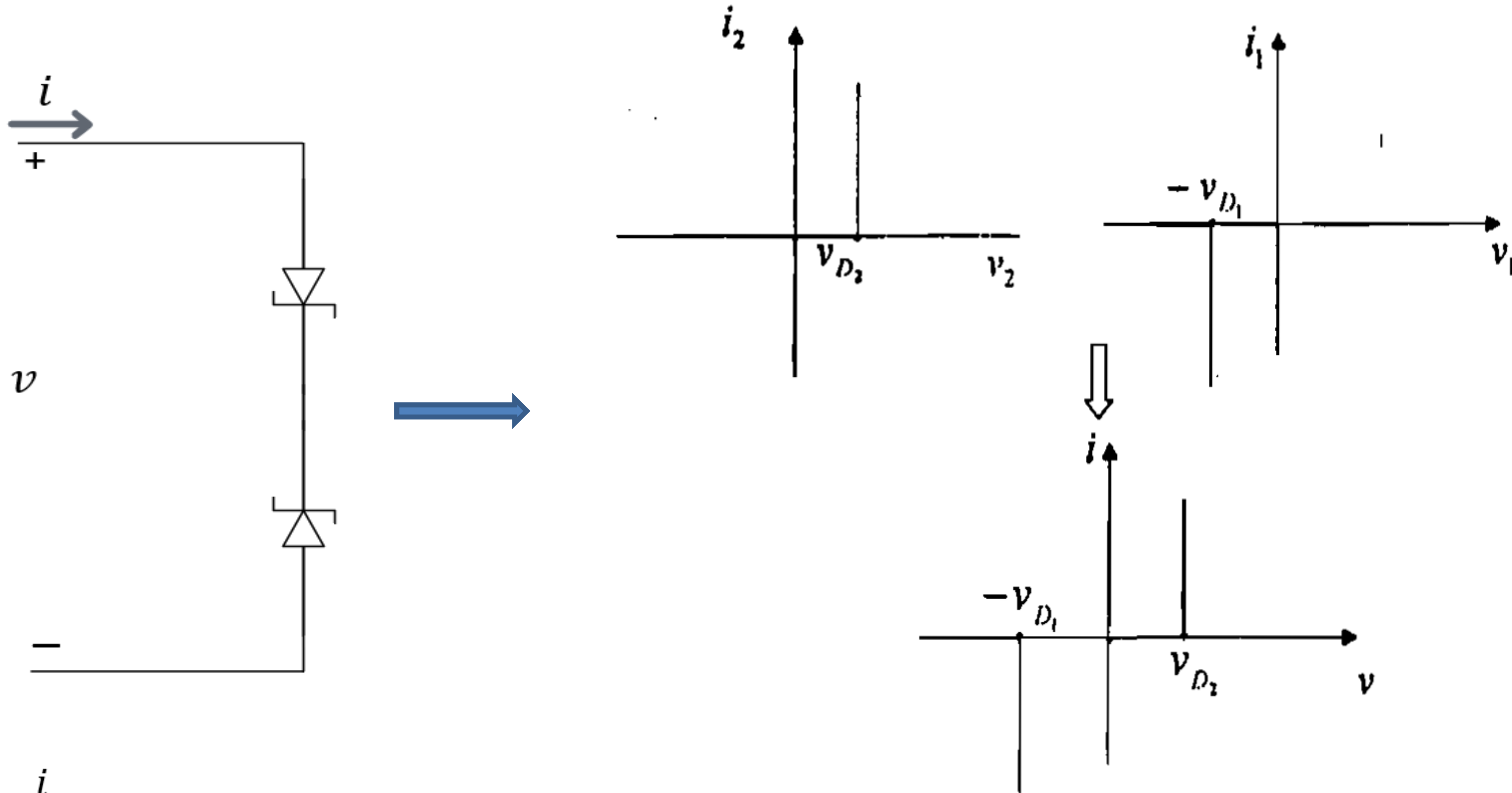


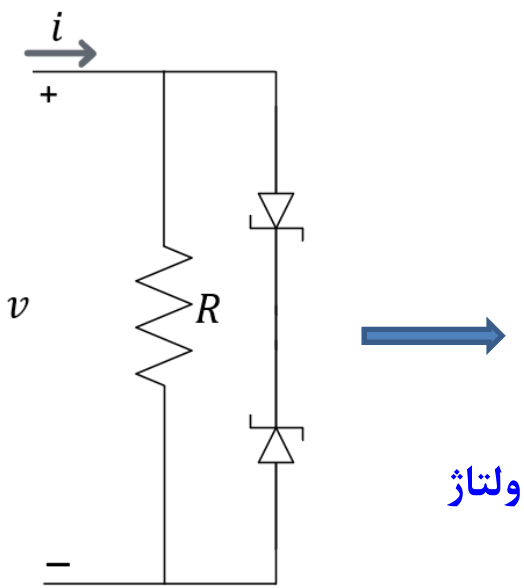


این مشخصه شبیه مشخصه یک دیود زنر ایده‌آل است که اگر ولتاژ آن از E- منفی تر شود، دیود، اتصال کوتاه شده و هر جریانی را از خود عبور می‌دهد. یعنی برای جریان های مثبت مانند دیود فیزیکی است و برای ولتاژ های منفی کم نیز مانند دیود فیزیکی است. لکن اگر ولتاژ دیود به مقدار $-V_D$ (ولتاژ شکست) برسد هر جریان منفی می‌تواند از آن بگذرد. تقریب خطی تکه ای دود زنر در دو حالت از منظر جهت ولتاژ و جریان به صورت زیر می باشد.

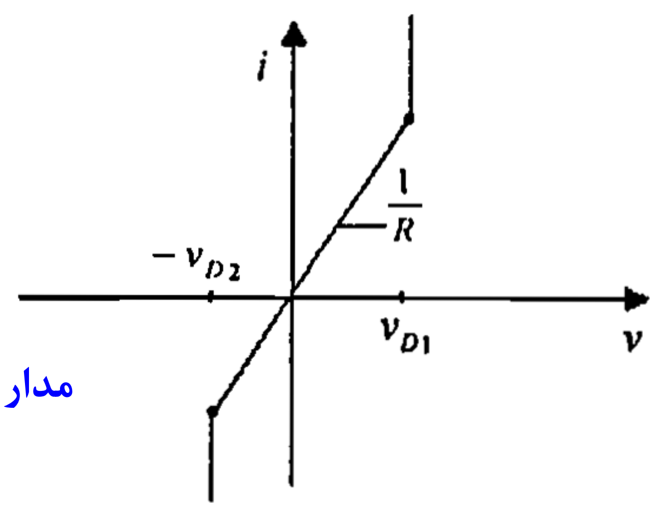




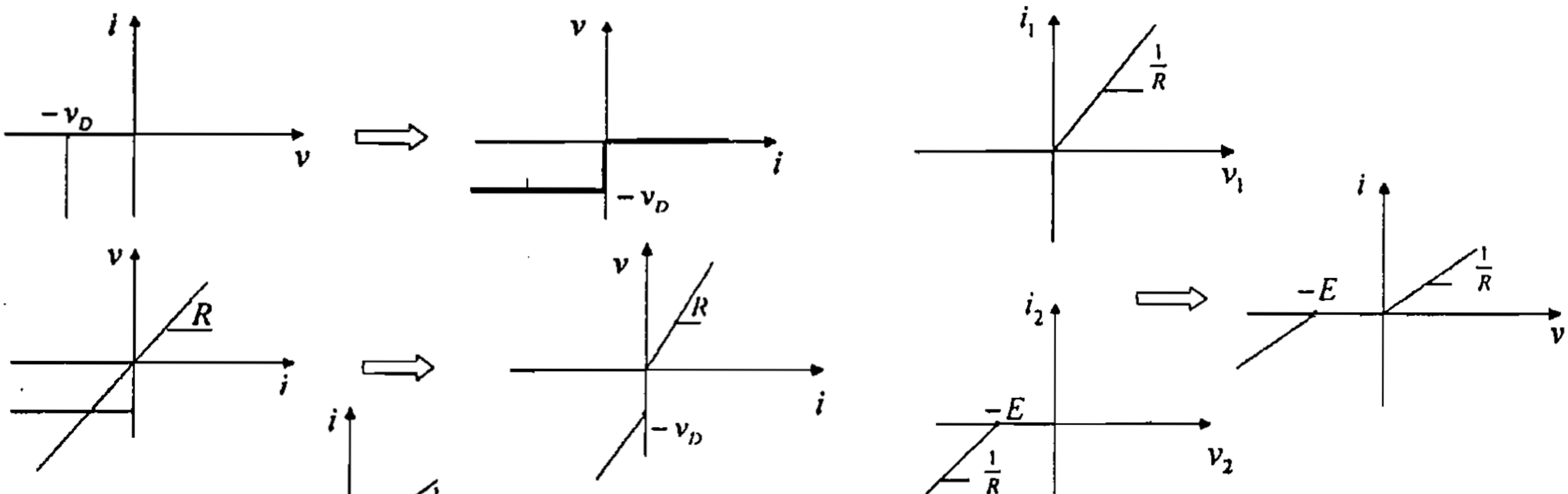


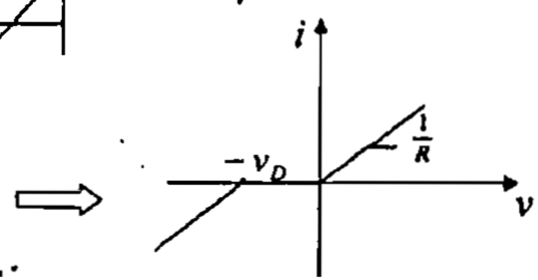


مدار محدودکننده ولتاژ



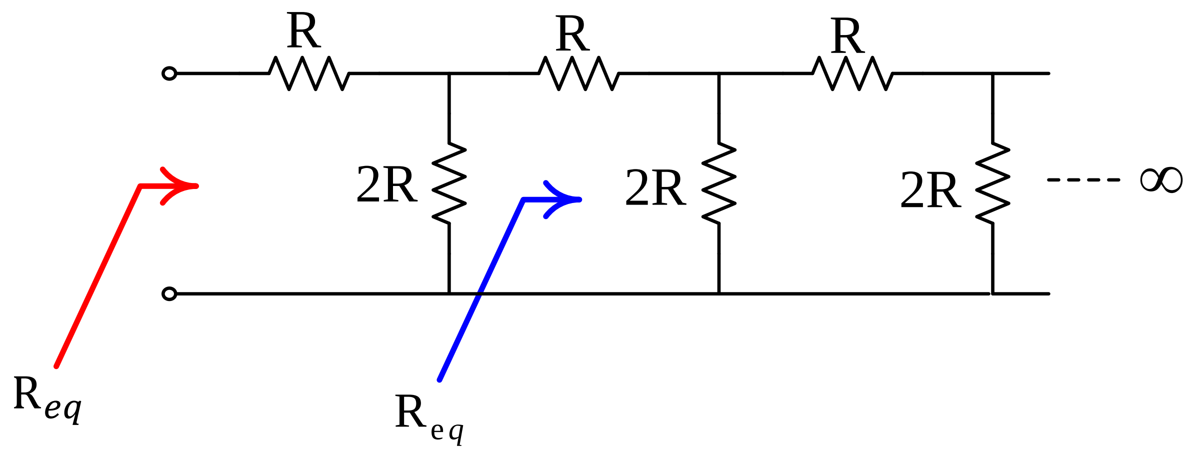
❖ **نکته:** طراحی مدار ممکن است به جواب یکتا منجر نشود و یک مشخصه vi را می توان از چند مدار مختلف به دست آورد. مانند مثال زیر:





اگر $V_D = E$ انتخاب شود، هر دو مشخصه یکسان است.

❑ مثال) به دست آوردن مقاومت معادل شبکه مقاومتی بی انتها:



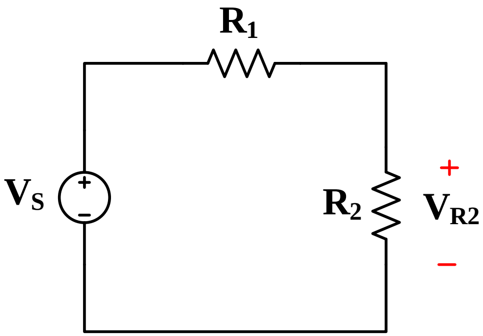
$$R_{eq} = R + R_{eq}||2R \quad \rightarrow \quad R_{eq} = R + \frac{R_{eq} \times 2R}{R_{eq} + 2R} \quad \rightarrow \quad {R_{eq}}^2 - RR_{eq} - 2R^2 = 0$$

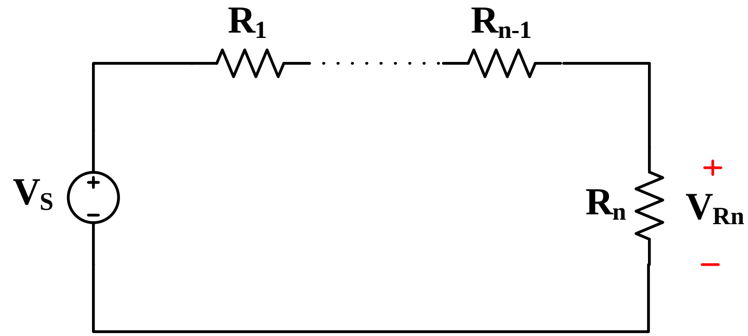
$$\rightarrow \begin{cases} R_{eq} = 2R \\ R_{eq} = -R \end{cases}$$

اگر ذکر شده باشد مقاومت ها مثبت می باشند، جواب 2R قابل قبول خواهد بود.

****

❑ مدار تقسیم کننده ولتاژ (Voltage Divider)



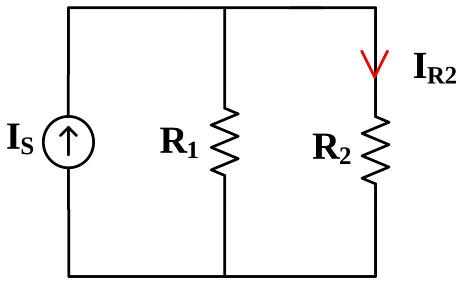


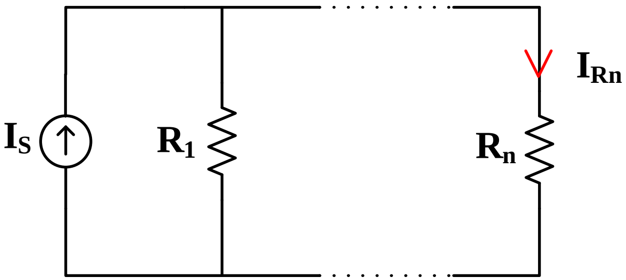
$$V_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S$$

$$V_{R1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_S$$

$$V_{Rn} = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n} V_S$$

❑ مدار تقسیم کننده جریان (Current Divider)





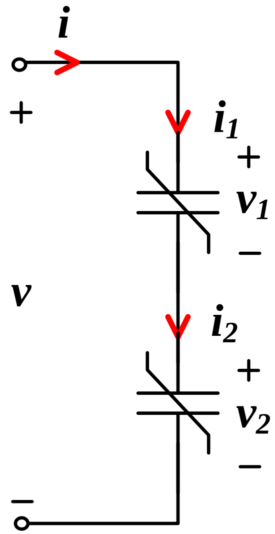
$$I_{R2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_S = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I_S$$

$$I_{R1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_S$$

$$I_{Rn} = \frac{G_n}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n} I_S$$

– اتصال سری و موازی خازن ها

❑ **اتصال سری خازن ها:** خازن ها در صفحه vq و یا qv تعریف می شوند. در به هم پیوست سری خازن ها، چون جریان یکسانی از خازن ها می گذرد، پس بار یکسانی نیز در آن ها ذخیره می شود. بنابراین، **در اتصال سری خازن های غیرخطی به ازای بارهای مساوی ولتاژها را جمع می کنیم.**

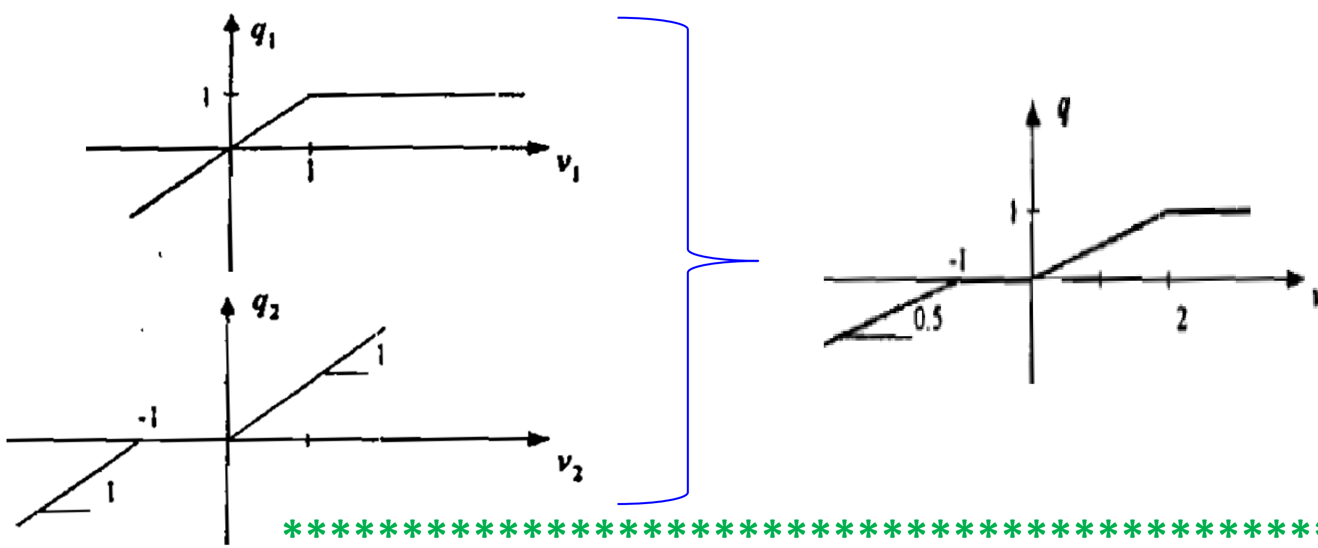


$$KVL:\ v = v_1 + v_2$$

$$KCL:\ i = i_1 = i_2 \xrightarrow[\text{یکسان بگیریم}]{\text{اگر بار اولیه خازن ها را}} q = q_1 = q_2$$

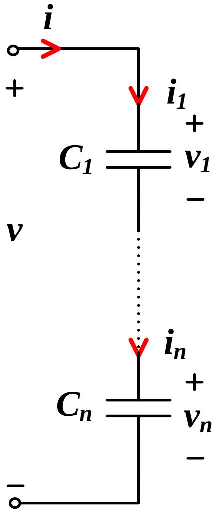
❑ **مثال)** مشخصه دو خازن غیرخطی در شکل زیر داده شده است. مشخصه اتصال سری آنها را رسم کنید.

■ **حل)**



****

❖ اگر خازن های سری همه از نوع LTI باشند، داریم:



$$v_1 = V_{01} + \frac{1}{C_1}\int_0^t i_1(t')\,dt'$$

$$\vdots$$

$$v_n = V_{0n} + \frac{1}{C_n}\int_0^t i_n(t')dt'$$

با اعمال محدودیت KVL داریم

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} V_{0i} + \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}\right)\int_0^t i(t')dt'$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$ و $$V_0 = V_{01} + \cdots + V_{0n}$$

یعنی سری هر تعداد خازن LTI از طریق رابطه بالا، دارای ظرفیتی معادل رابطه مذکور بوده و این خازن معادل نیز ولتاژ اولیه ای معادل با جمع ولتاژ اولیه تمامی خازن ها دارد. رابطه بالا را برای دو خازن سری به صورت زیر می توان بیان کرد:

روابط تک تک خازن ها

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 \\ q_1 = q_2 \rightarrow C_1V_1 = C_2V_2 \end{cases}$$

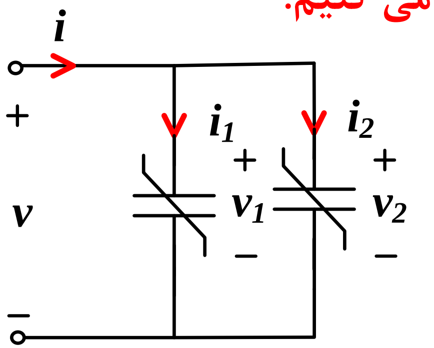
روابط خازن معادل

$$\begin{cases} C_{\mathrm{eq}} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \\ V_{0\mathrm{eq}} = V_{01} + V_{02} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(V_1 + V_2)^2$$

یعنی انرژی ذخیره شده در خازن معادل سری برابر **مجموع** انرژیهای ذخیره شده در هر یک از خازن ها است.

❑ **اتصال موازی خازن ها:** در به هم پیوست موازی خازن ها، ولتاژ خازن ها یکسان است و بار بین آن ها تقسیم می شود.
بنابراین، **در اتصال موازی خازن ها، به ازای ولتاژ های مساوی، بار خازن ها را جمع می کنیم.**

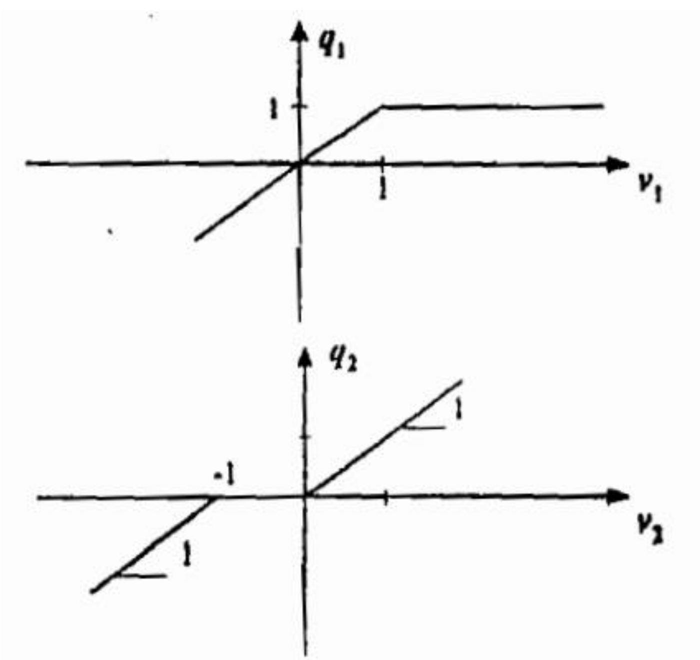


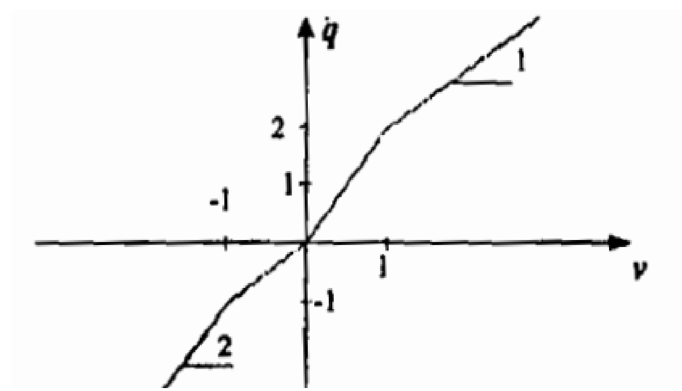
$$KVL:\ v = v_1 = v_2$$

$$KCL:\ i = i_1 + i_2 \xrightarrow[\text{تک تک خازن ها است}]{\text{در حالت موازی، بار کل مجموع بار}} q = q_1 + q_2$$

❑ **مثال)** مشخصه دو خازن غیرخطی در شکل زیر داده شده است. مشخصه اتصال موازی آنها را رسم کنید.

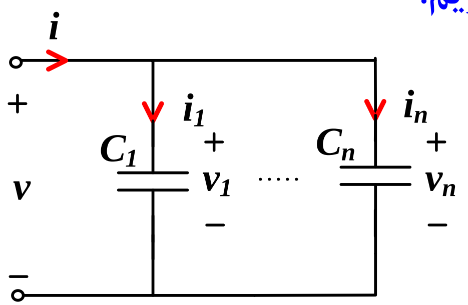
■ **حل)**





****

❖ اگر خازن های موازی همه از نوع LTI بوده و ولتاژ اولیه همه آن ها یکسان باشد، داریم:

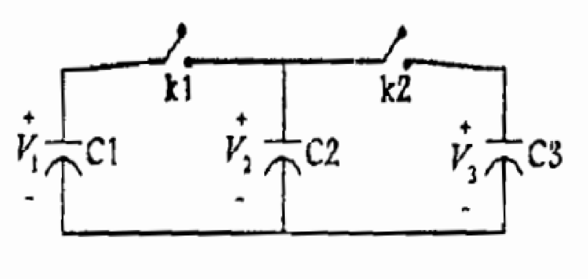


$$i = i_1 + \cdots + i_n = C_1 \frac{dv_1}{dt} + \cdots + C_n \frac{dv_n}{dt} = (\sum_{i=1}^{n} C_i) \frac{dv}{dt}$$

$$\boldsymbol{C_{eq} = C_1 + \cdots + C_n}$$

$$V_0 = V_{01} = \cdots = V_{0n}$$

یعنی موازی هر تعداد خازن LTI با ولتاژ اولیه یکسان، از طریق رابطه بالا، دارای ظرفیتی معادل رابطه مذکور بوده و این خازن معادل نیز ولتاژ اولیه ای معادل با ولتاژ اولیه تمامی خازن ها دارد.



اگر ولتاژ اولیه خازن های LTI برابر نباشند، تغییراتی به شرح زیر در روابط وجود خواهد داشت (مثال برای سه خازن با ولتاژهای اولیه V_1 و V_2 و V_3 که با بستن همزمان کلیدهای k_1 و k_2 موازی شده و ولتاژ برابر V را خواهند داشت). در این شرایط، ولتاژ خازن ها با بسته شدن کلیدها دچار **تغییر پله ای** می شود و از قانون بقای بار استفاده می شود (مطابق قانون بقای بار، مجموع بار خازن ها درست قبل و بعد بسته شدن کلیدها تغییر نمی کند). چون ولتاژ اولیه آنها قبل از بستن متفاوت است و پس از بستن باید یکسان باشد پس یک جابجایی آنی بار صورت می گیرد. یعنی یک **جریان ضربه** از آن ها می گذرد که موجب این جابجایی آنی بار می شود. پس روابط زیر را برای به دست آوردن ولتاژ بعد از توازی داریم:

$$\mathrm{Q_1(0^-) + Q_2(0^-) + Q_3(0^-) = Q_1(0^+) + Q_2(0^+) + Q_3(0^+)}$$

$$\mathrm{Q_1(0^-) = C_1V_1\,,\quad Q_2(0^-) = C_2V_2,\ Q_3(0^-) = C_3V_3}$$

$$\mathrm{Q_1(0^+) = C_1V_1\,,\quad Q_2(0^+) = C_2V_2\,,\quad Q_3(0^+) = C_3V_3}$$

$$C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

$$V = \frac{C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

با استدلالی مشابه، اگر به جای سه خازن، دو خازن با یکدیگر موازی شوند، ولتاژ مشترک بعد از موازی شدن برابر خواهد بود:

$$\boxed{V = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}}$$

در حالت موازی شدن خازن ها با ولتاژهای اولیه متفاوت، انرژی ذخیره شده قبل و بعد از اتصال موازی را به صورت زیر می توان تفسیر نمود:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon(0^-) &= \frac{1}{2}C_1V_1^2 + C_2V_2^2 \\ \varepsilon(0^+) &= \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\left[\frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}\right]^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\varepsilon(0^+) = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\left[\frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}\right]^2 < \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon(0^+) < \varepsilon(0^-)}}$$

که اختلاف این دو انرژی، برابر انرژی تلف شده در سیم های با مقاومت صفر ناشی از عبور **جریان ضربه** است.

– اتصال سری و موازی سلف ها

- **اتصال سری سلف ها:** در اتصال سری سلفهای غیر خطی به ازای جریان های یکسان ولتاژها یا شارها را با هم جمع می کنیم.
در اتصال سری سلف های LTI لازم است جریانهای اولیه سلفها یکسان باشد تا KCL نقض نشود. اندوکتانس معادل n سلف سری با اندوکتانس L_k و جریانهای اولیه یکسان $i(0)$ برابر عبارت زیر است:

$$\boldsymbol{L = \sum_{k=1}^{n} L_k}$$

- **اتصال موازی سلف ها:** اتصال موازی n سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با جریانهای اولیه $i_k(0)$ و اندوکتانس L_k معادل یک سلف با اندوکتانس L و جریان اولیه $I(0)$ است که:

$$\boldsymbol{\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}} \qquad \boldsymbol{i(0) = \sum_{k=1}^{n} i_k(0)}$$

❖ **ملاحظه می شود که اتصال سری (موازی) سلف های LTI، دوگان اتصال موازی (سری) خازن های LTI است و برعکس.**

✓ اگر سلفهای L_1 با جریان اولیه I_1 و L_2 با جریان اولیه I_2 به طور ناگهانی با هم سری شوند از اتصال سری آن ها جریانی می گذرد که با رابطه زیر بیان می شود:

$$I = \frac{L_1 I_1 + L_2 I_2}{L_1 + L_2}$$

یعنی اتصال سری آنها معادل سلفی با اندوکتانس $L_1 + L_2$ و جریان اولیه I است.

می توان به طریق مشابه نشان داد که **انرژی ذخیره شده در سلف ها پس از اتصال سری کوچکتر از مجموع انرژی های ذخیره شده در هر یک از سلف ها است.**

۲–۳– روش های تحلیل مدارهای مقاومتی

- منظور از تحلیل یک مدار بدست آوردن **ولتاژ و جریان تمام شاخه ها یا دسته معینی از شاخه ها** است. اساس کلیه روش‌های تحلیل مدار اعمال مناسب قوانین KVL و KCL و نوشتن درست معادلات شاخه ها بوده و اختلاف اصلی روش‌های مختلف تحلیل مدار در تعداد و نوع متغیر هایی است که به عنوان متغیر های مدار در نظر گرفته می‌شوند. متداول ترین روش‌های تحلیل مدار عبارتند از:

۱- روش تحلیل گره؛

۲- روش تحلیل مش؛

- **یادآوری قانون جریان کیرشهف (KCL) و تعریف گره:** در هر گره از هر مدار فشرده و **در هر لحظه از زمان** مجموع جبری جریان‌های همه شاخه‌هایی که از آن گره خارج می‌شوند برابر صفر است. **(گره محل تقاطع دو یاچند شاخه می باشد).**
- **یادآوری قانون ولتاژ کیرشهف (KVL) و تعریف مش:** در هر مدار فشرده و **در هر لحظه از زمان** و در هر حلقه آن، مجموع جبری ولتاژ شاخه های واقع در حلقه صفر است (**حلقه، هر مسیر بسته در مدار است که از یک گره شروع شده و به همان گره ختم می شود**).

– روش تحلیل گره

- **اصول و تعاریف حاکم بر روش تحلیل گره:**
  - ✓ در این روش متغیر های مورد نظر ولتاژ گره ها هستند که ولتاژ آن‌ها نسبت به یک **گره مبنا** نسجیده می‌شود.
  - ✓ هر گره‌ای را به‌طور دلخواه می‌توان گره مبنا انتخاب کرد و ولتاژ آن را صفر در نظر گرفت.
  - ✓ ولتاژ شاخه ها برابر تفاضل ولتاژ گره های دو سر آنهاست که با معلوم بودن ولتاژ گره ها تعیین می‌شوند.
  - ✓ در این روش، **منابع ولتاژ سری با مقاومت ها** را به **منابع جریان** تبدیل می‌کنیم.
  - ✓ تعداد متغیر های انتخاب شده در روش های تحلیل گره برابر است با تعداد **گره ها منهای یک (n-1)** (متغیر های مستقل ولتاژ شاخه ها).

❑ مراحل مختلف اجرای روش تحلیل گره عبارتند از:

۱- گره‌ای را به عنوان گره مبنا انتخاب کرده و ولتاژ آن را صفر در نظر بگیرید.

۲- همه گره های مدار را شماره گذاری کرده و شماره گره مبنا را صفر قرار دهید.

۳- ولتاژ همه گره ها را به نسبت به گره مبنا به عنوان متغیر مدار انتخاب کنید.

۴- منابع ولتاژ سری با مقاومت را به منابع جریان تبدیل کنید تا قانون KCL اجرایی باشد.

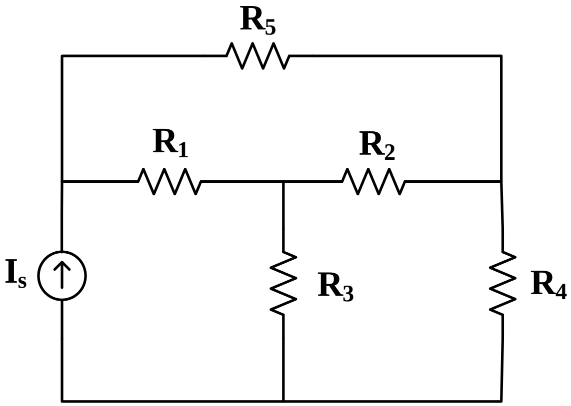
۵- قانون KCL را در تمام گره ها به‌جز گره مبنا بنویسید (معادلات گره). سعی کنید که این معادلات منحصراً برحسب ولتاژ گره ها باشد. یعنی متغیرهای دیگر را برحسب ولتاژ گره ها بیان کنید. جهت جریان شاخه ها را جهت جریان خارج شونده از گره را در نظر بگیرید.

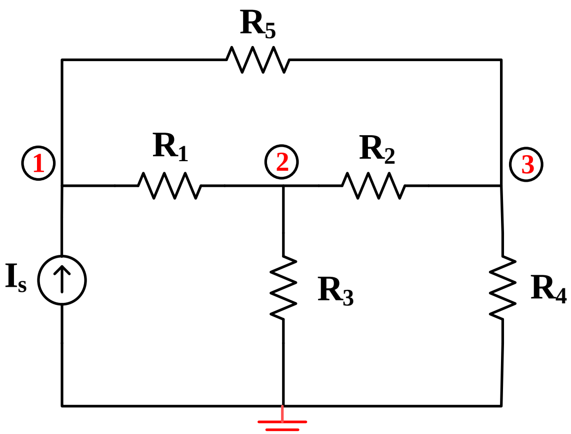
۶- اگر بین دو گره، یک منبع ولتاژ مستقل یا وابسته باشد، قانون KCL را برای **گره مرکب (گره های دو سر منبع ولتاژ)** متشکل از دو گره بنویسید تا متغیر اضافی ایجاد نشود. در واقع از جمع قانون KCL دو گره مذکور، معادله گره مربوط به همان گره مرکب تشکیل می شود. منابع وابسته را مانند منابع نابسته در نظر گرفته و سعی کنید فقط متغیرهای ولتاژ گره ها در معادلات ظاهر شوند.

۷- اعمال مراحل فوق در هر مدار مقاومتی، به n-1 معادله با n-1 مجهول برحسب متغیرهای ولتاژ گره ها منجر می‌شود (n تعداد گره های مدار است).

۸- معادلات را با روش کرامر یا هر روش دیگری که راحت‌تر باشد حل کنید و متغیر های ولتاژ گره را به دست آورید.

۹- ولتاژ هر شاخه، برابر تفاضل ولتاژ گره های دو سر آن است. جریان شاخه ها با استفاده از رابطه اساسی شاخه به دست می‌آید.





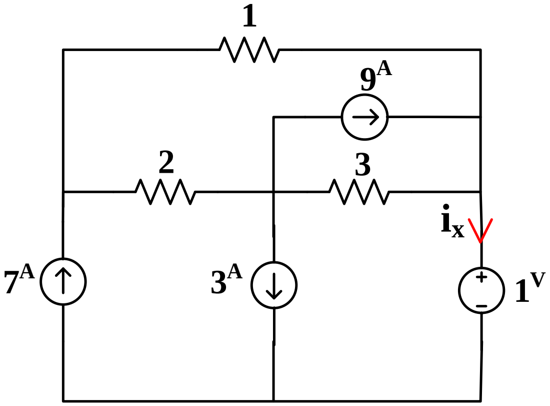
KCL: در گره (۱) $$\frac{e_1-e_2}{R_1}+\frac{e_1-e_3}{R_5}-I_s=0$$

KCL: در گره (۲) $$\frac{e_2-e_1}{R_1}+\frac{e_2-e_3}{R_2}+\frac{e_2}{R_3}=0$$

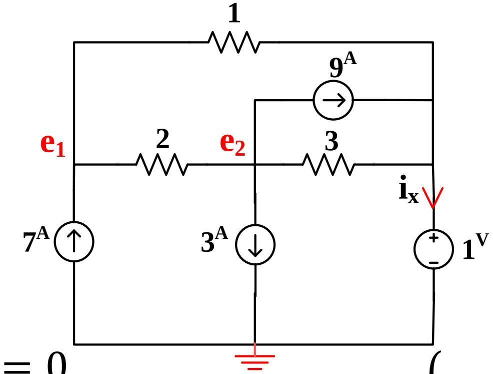
KCL: در گره (۳) $$\frac{e_3-e_1}{R_5}+\frac{e_3-e_2}{R_2}+\frac{e_3}{R_4}=0$$

از حل سه معادله با سه مجهول بالا، مقدار ولتاژ گره ها یعنی e_1 تا e_3 قابل استخراج است.

❑ **مثال)** در مدار مقابل، مقاومت ها بر حسب مهو می باشند. مطلوبست محاسبه i_x.



■ **حل)**



KCL در گره (۱): $(e_1-1)+2(e_1-e_2)-7=0$

KCL در گره (۲): $2(e_2-e_1)+3+9+3(e_2-1)=0$

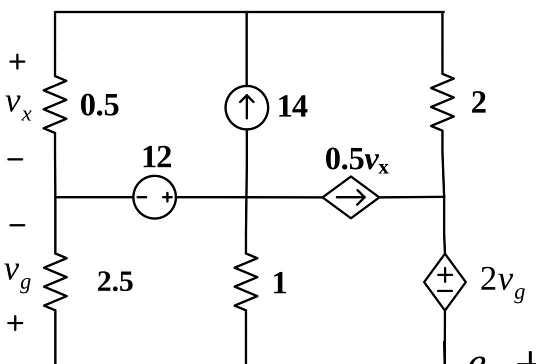
$$\longrightarrow \begin{cases} e_1 = 2^V \\ e_2 = -1^V \end{cases}$$

با نوشتن KCL در گره سمت راست، جریان ix بدست می آید.

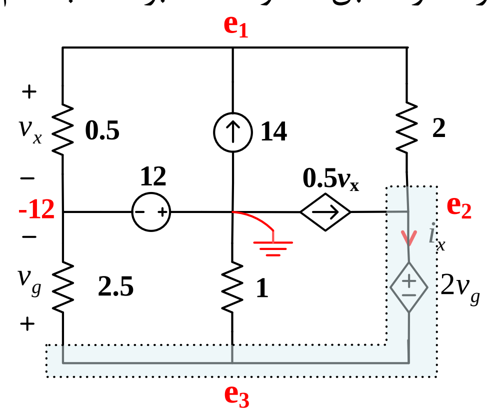
$$3(1-e_2)+(1-e_1)-9+i_x=0 \longrightarrow i_x = 4^A$$

****

❑ **مثال)** در مدار مقابل، مقاومت ها بر حسب اهم می باشند.



■ **حل)**



$$\begin{cases} v_x = e_1 + 12 \\ v_g = e_3 + 12 \end{cases}$$

KCLدر گره ۱: $\dfrac{e_1+12}{0.5}+\dfrac{e_1-e_2}{2}-14=0$

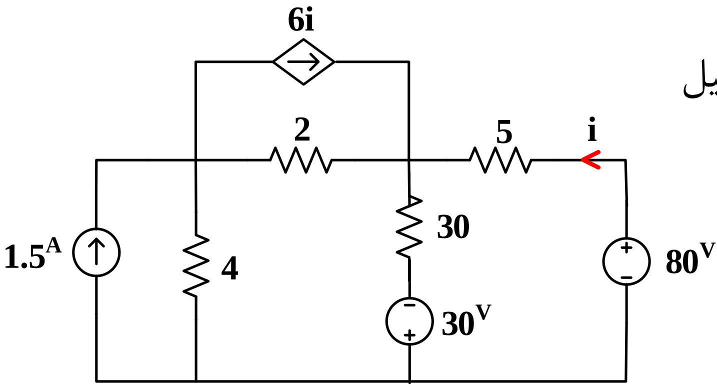
KCL در گره مرکب ۲ و ۳: $\dfrac{e_2-e_1}{2}-0.5(e_1+12)+e_3+\dfrac{(e_3+12)}{2.5}=0$

$e_2-e_3=2(e_3+12)$

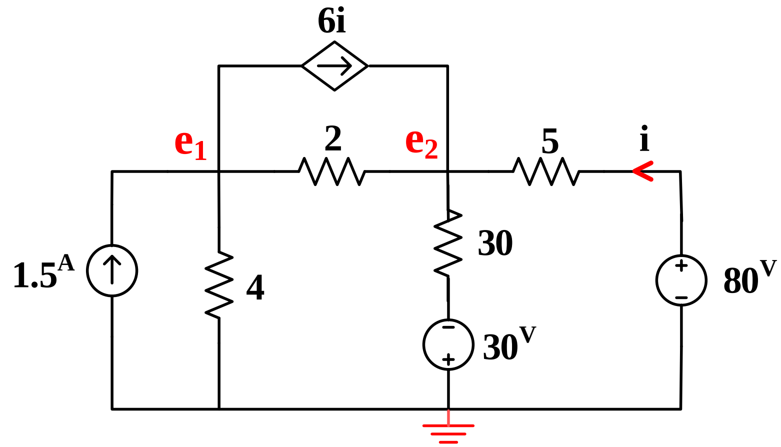
$$\longrightarrow v_4=-2\,,\,v_3=0\ ,v_2=-4$$

****

❑ **مثال)** در مدار مقابل، مقاومت ها بر حسب مهو می باشند. مدار را تحلیل کنید و توانی که هر منبع تحویل می دهد را حساب کنید.



■ **حل)**



ابتدا مقدار متغیر وابسته بر حسب ولتاژ گره ها تعیین می شود.

$$i = \frac{80 - e_2}{5}$$

سپس معادلات KCL نوشته می شود:

KCL در گره (۱): $$\frac{e_1}{4} + \frac{e_1 - e_2}{2} - 1.5 + 6\left(\frac{80 - e_2}{5}\right) = 0$$

KCL در گره (۲): $$\frac{e_2 - e_1}{2} + \frac{e_2 - (-30)}{30} - 6\left(\frac{80 - e_2}{5}\right) + \frac{e_2 - 80}{5} = 0$$

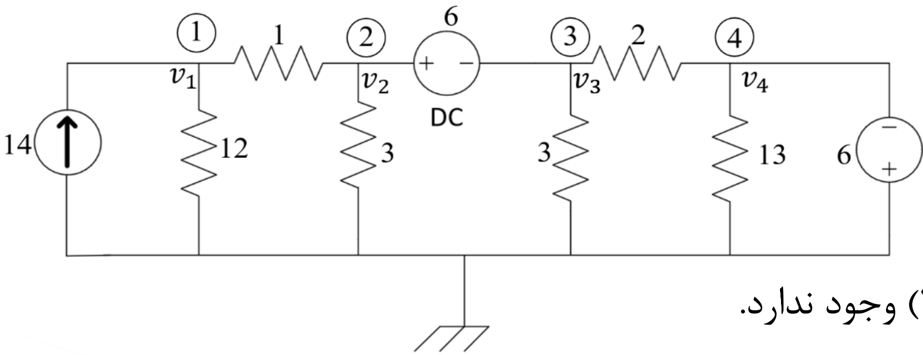
$$e_1 = 10\ ,\ \ e_2 = 60\ ,\mathrm{i} = 4^A$$

$$P_{1.5A} = -1.5 \times 10 = -15^W \qquad P_{80V} = -4 \times 80 = -320^W$$

$$P_{30V} = -3 \times 30 = -90^W \qquad P_{6i} = (10 - 60) \times 6 \times 4^A = -1200^W$$

****

❑ **مثال)** در مدار مقابل، مقاومت ها بر حسب مهو است. ولتاژ گره ها را به دست آورید.



■ **حل)**

ولتاژ گره (۴) برابر 6- ولت است و لزومی به نوشتن KCL در گره (۴) وجود ندارد.

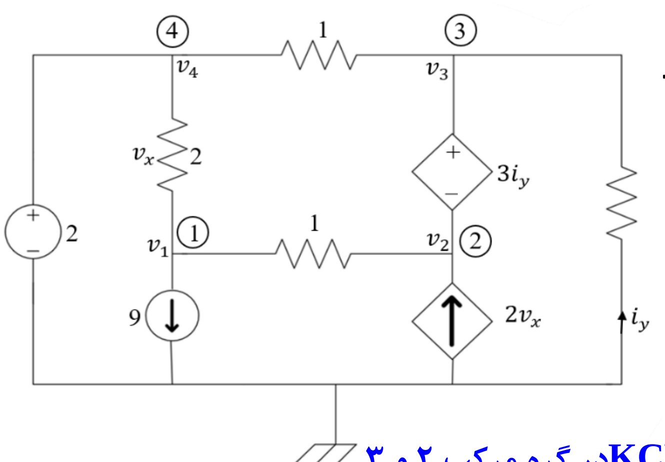
KCL در گره ۱: $\dfrac{v_1}{12}+\dfrac{v_{1-v_2}}{1}=14$

KCL در گره مرکب ۲ و ۳: $\dfrac{v_2-v_1}{1}+\dfrac{v_2}{3}+\dfrac{v_3}{3}+\dfrac{v_3+6}{2}=0$

$$v_2-v_3=6$$

$$\left.\right\} \quad v_1=24,\quad v_2=12,\quad v_3=6$$

❑ **مثال)** در مدار مقابل، مقاومت ها بر حسب مهو است. ولتاژ گره ها را به دست آورید.



■ **حل)**

$$v_3=3i_y+v_2=-3\frac{v_3}{2}+v_2 \;\rightarrow\; v_3=\frac{2}{5}v_2$$

KCL در گره ۱: $\dfrac{v_1-v_2}{1}+\dfrac{v_1-2}{2}+7=0$

KCL در گره مرکب ۲ و ۳: $\dfrac{v_3-2}{1}+\dfrac{v_3}{2}+\dfrac{v_2-v_1}{1}-2v_x=0 \rightarrow v_x=v_4-v_1=2-v_1$

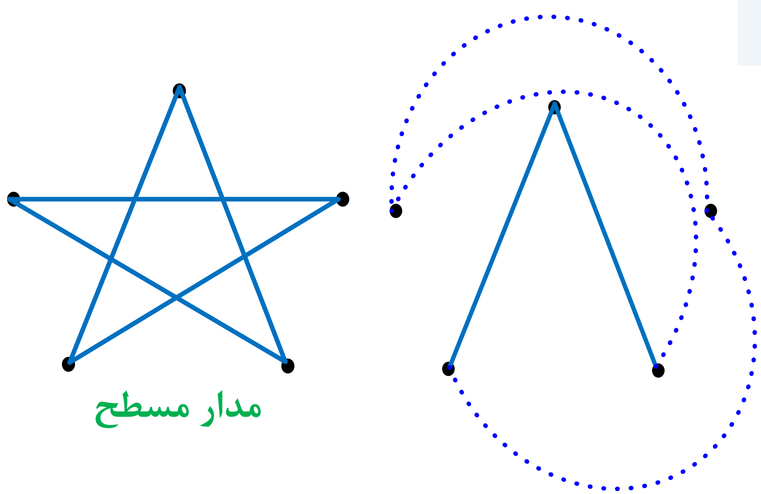
$\longrightarrow$ $v_3=2\;,\;\; v_2=5\,,\;\; v_1=-2$

– روش تحلیل مش

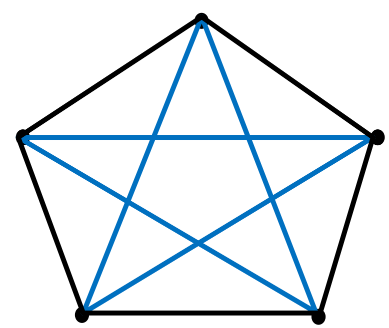
اصول و تعاریف حاکم بر روش تحلیل مش:

- مش **ساده ترین حلقه ای** است که شاخه ای درون آن نباشد.
- مش فقط در مدار های **مسطح** قابل تعریف است. مدار مسطح مداری است که بتوان شکل آن را روی صفحه کاغذ چنان رسم کرد که هیچ دوشاخه ای همدیگر را بجز در گره قطع نکند.
- شاخه های درونی فقط در دو مش مشترک هستند.
- شاخه های بیرونی هر مدار فقط در یک مش قرار می‌گیرند.
- در روش تحلیل مش، متغیر های مورد نظر جریان های فرضی هستند که در مش ها گردش می‌کنند.
- شاخه ای که در مش مشترک است جریان هر دو مش از آن می گذرد.
- جهت مش ها اختیاری است. لکن مرسوم است که جهت های عقربه های ساعت انتخاب شود.
- جریان گذرنده از شاخه های مشترک دو مش تفاضل جریان آن دو مش خواهد بود.
- تعداد مش های یک مدار، برابر با تعداد **جریان های مستقل** آن مدار است. به عبارتی، جریان مش ها جریان های **مستقل** از هم می‌باشند.
- اساس تحلیل مش، نوشتن معادلات KVL در تمام مش ها است که از حل این معادلات جریان های مش ها بدست می‌آید.
- تعداد مش های یک مدار (l) برابر تعداد شاخه ها (b) منهای تعداد گره ها (n_t) به اضافه یک است یعنی:

$$l = b - n_t + 1$$

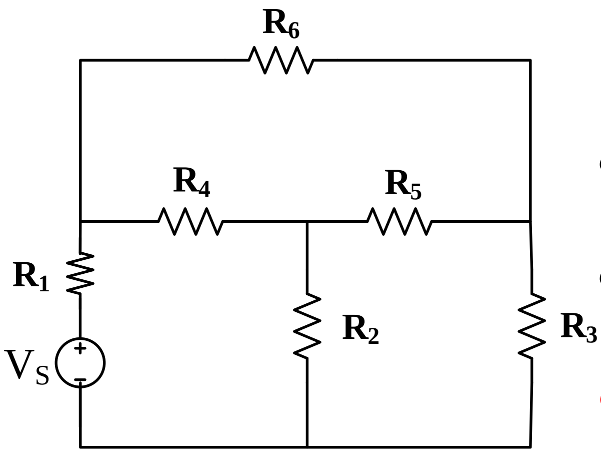


مدار مسطح



مدار غیر مسطح

❑ مراحل مختلف اجرای روش تحلیل مش عبارتند از:

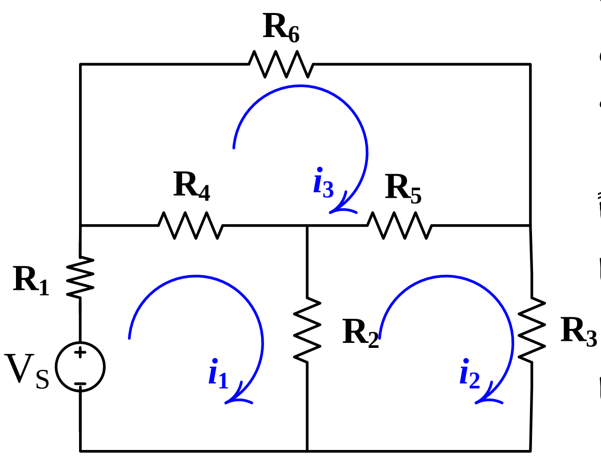


۱- منابع جریان موازی با مقاومت ها را به منابع ولتاژ سری با آنها تبدیل کنید.

۲- مش ها را شماره گذاری کنید و جریان آن ها را در جهت عقربه های ساعت به عنوان متغیر های مدار انتخاب کنید.

۳- جریان شاخه ای که در یک مش قرار دارد، در برابر جریان آن مش و جریان شاخه ای که در دو مش قرار دارد، برابر جریان‌های آن دو مش است.

۴- اگر بین دو مش، یک منبع جریان مستقل یا وابسته باشد، قانون KVL را برای **مش مرکب (مش های دربردارنده منبع جریان)** متشکل از دو مش بنویسید تا متغیر اضافی ایجاد نشود. در واقع از جمع قانون KVL دو مش مذکور، معادله مش مربوط به همان مش مرکب تشکیل می شود. منابع وابسته را مانند منابع نابسته در نظر گرفته و سعی کنید فقط متغیرهای ولتاژ گره ها در معادلات ظاهر شوند.



۵- KVL را در تمام مش های مدار بنویسید و سعی کنید معادلات حاصل منحصراً برحسب جریان مش ها نوشته شود. یعنی متغیرهای دیگر را برحسب جریان های مش ها بیان کنید.

۶- منابع وابسته را مانند منابع نابسته در نظر بگیرید و پس از اعمال KVL در مش ها سعی کنید کلیه متغیر ها را بر حسب جریان مش ها بیان شوند.

۷- اعمال مراحل فوق به l معادله l مجهولی جبری خطی برحسب جریان‌های مش‌ها منجر می‌شود که از حل این معادلات جریان مش ها به دست می‌آیند.

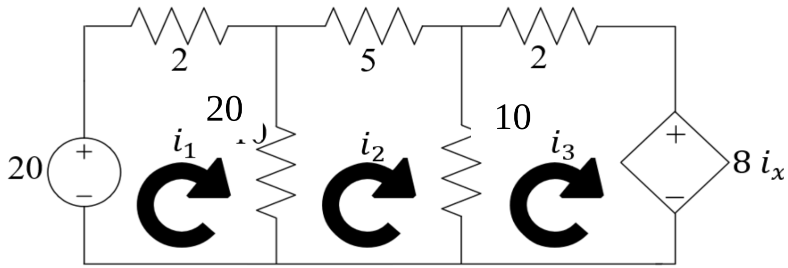
۸- جریان شاخه ها، از روی جریان مش ها و ولتاژ شاخه ها، از روی جریان شاخه ها به دست می‌آید.

KVL در مش ۱: $R_1 i_1 + R_4(i_1 - i_3) + R_2(i_1 - i_2) - V_s = 0$

KVL در مش ۲: $R_3 i_2 + R_2(i_2 - i_1) + R_5(i_2 - i_3) = 0$

KVL در مش ۳: $R_6 i_3 + R_5(i_3 - i_2) + R_4(i_3 - i_1) = 0$

از حل سه معادله و سه مجهول مقادیر i_1 تا i_3 به دست می آیند.



❑ **مثال)** در مدار مقابل، مقاومت ها بر حسب اهم می باشند. مدار را تحلیل کنید.

■ **حل)**

KVL در مش ۱ : $2i_1 + 20(i_1 - i_2) = 20$

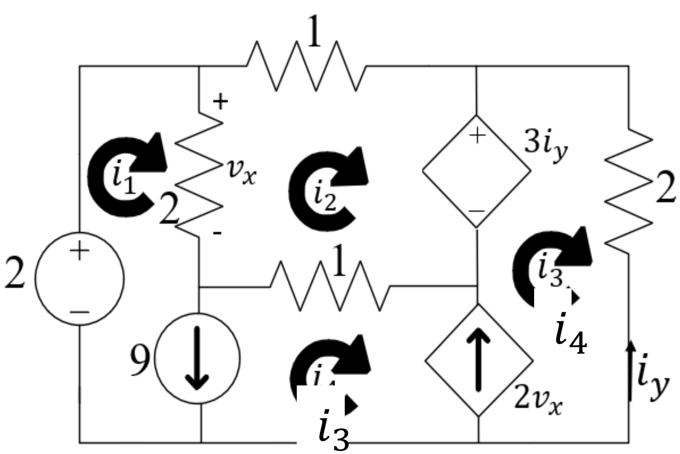
KVL در مش ۲ : $5i_2 + 10(i_2 - i_3) + 20(i_2 - i_1) = 0$

KVL در مش ۳ : $2i_3 + 8i_x + 10(i_3 - i_2) = 0$

$$i_x = i_2$$

$$\left.\right\} \quad i_1 = 2A,\quad i_2 = 1.2A,\quad i_3 = 0.2A$$

****



❑ **مثال)** در مدار مقابل، مقاومت ها بر حسب اهم می باشند. مدار را تحلیل کنید.

■ **حل)**

$$i_1 - i_3 = 9$$

$$i_4 - i_3 = 2v_x = 2[2(i_1 - i_2)] = 4(i_1 - i_2)$$

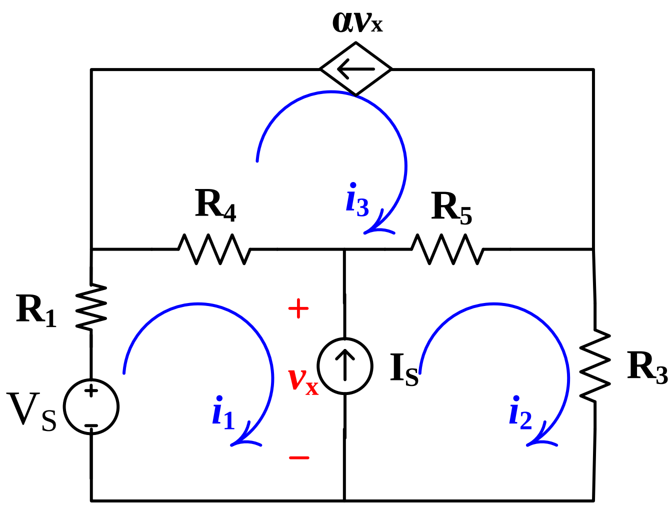
$$i_y = -i_4$$

KVLدر مش ۴: $i_2 + 3i_y + (i_2 - i_3) + 2(i_2 - i_1) = 0$

KVLدر حلقه متشکل از مش های ۱ و ۳ و ۴: $2(i_1 - i_2) + (i_3 - i_2) - 3i_y + 2i_4 = 2$

$$\longrightarrow \quad i_1 = 2\ ,\qquad i_2 = 0\ ,\qquad i_3 = -7\ ,\qquad i_4 = 1$$

****



❑ **مثال)** در مدار مقابل، مقاومت ها بر حسب اهم می باشند. مدار را تحلیل کنید (**حالت خاص که مش مرکب کاربرد لازم را ندارد**).

■ **حل)**

به دلیل اینکه مقدار متغیر وابسته در منبع جریان وابسته، ولتاژ vx را لحاظ کرده است، دیگر ایده KVL در حلقه شامل مش ۱ و ۲ را نمیتوان بکار برد.

KVL در مش ۱: $R_1 i_1 + R_4(i_1 - i_3) + v_x - V_S = 0$

KVL در مش ۲: $R_5(i_2 - i_3) + R_3 i_2 - v_x = 0$

نوشتن KVL برای مش ۳ فایده ای ندارد و لذا مستقیما رابطه جریان مش با منبع وابسته جریان نوسته میشود:

$$i_3 = -\alpha v_x$$

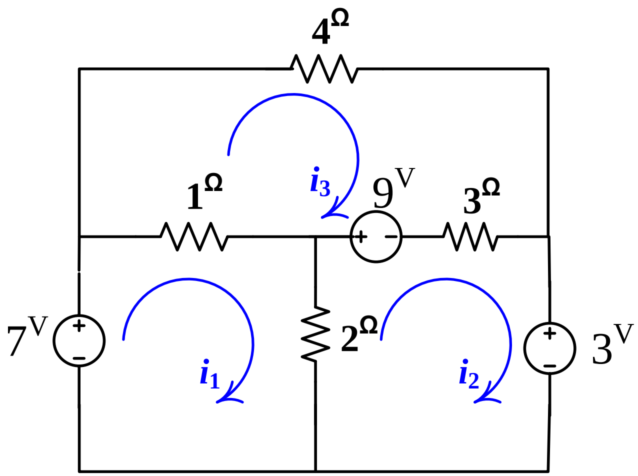
سه معادله و چهار مجهول فوق نیاز به یک معادله اضافه تر دارد:

رابطه جریان منبع: $i_2 - i_1 = I_s$

****

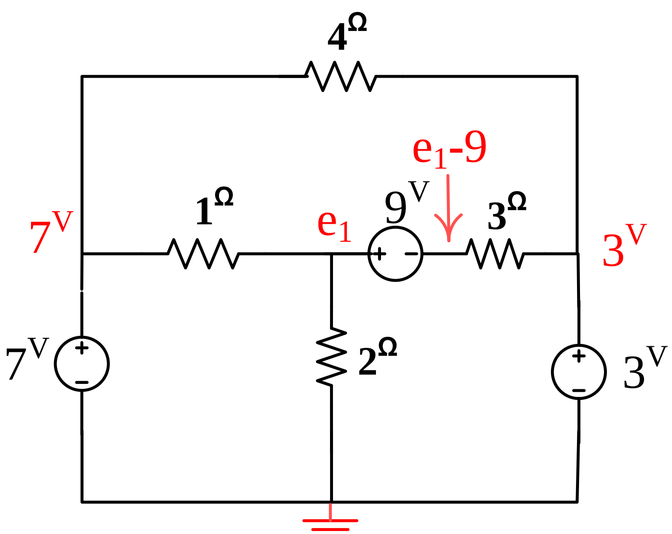
– انتخاب روش تحلیل مناسب

❑ **در یک مدار داده شده کدام یک از دو روش تحلیل گره یا مش را بهتر است به کار ببریم؟** به طور کلی آن روش تحلیلی مناسب است که به معادلاتی با تعداد متغیر های کمتر منجر شود.



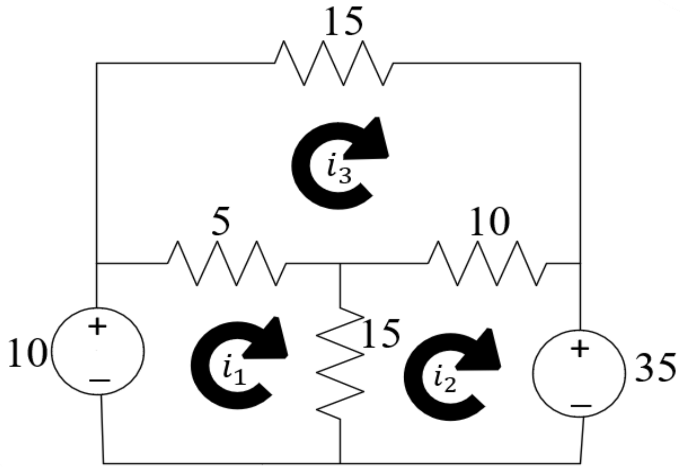
✓ در مثال مقابل با به کارگیری تحلیل مش نیاز به تشکیل سه معادله خواهد بود و نتیجه به شکل مقابل می گردد:

$$i_1 = 2\ ,\ i_2 = -1\ ,\ \ i_3 = 1$$



و اگر تحلیل گره به کار میرفت:

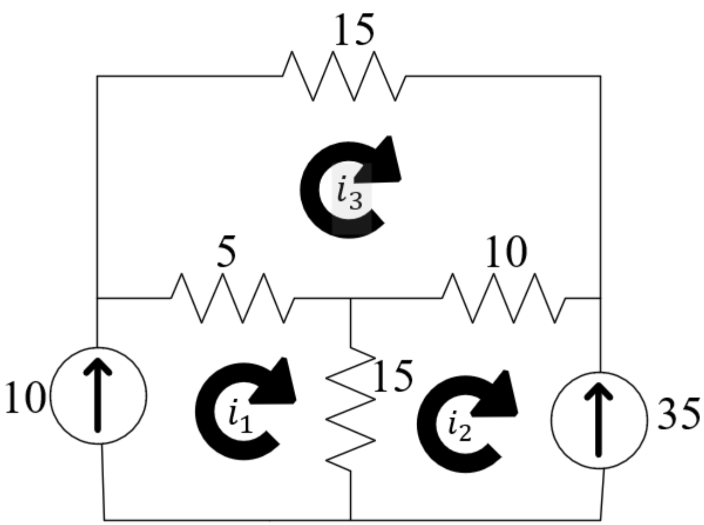
KCL در گره (۱):
$$\frac{e_1}{2} + (e_1 - 7) + \frac{(e_1 - 9 - 3)}{3} = 0$$
$$\rightarrow\ e_1 = 6^V$$



- نمونه مداری که در آن، روش گره صرفا یک مجهول دارد و با یک KCL مدار حل می شود. اگر روش تحلیل مش را به کار می‌بردیم سه متغیر مجهول باید در نظر می گرفتیم و سه معادله سه مجهولی حل می‌کردیم. پس در مدار داده شده روش **تحلیل گره** مناسب تر است.

$$\frac{V-10}{5}+\frac{V}{15}+\frac{V-35}{10}=0$$

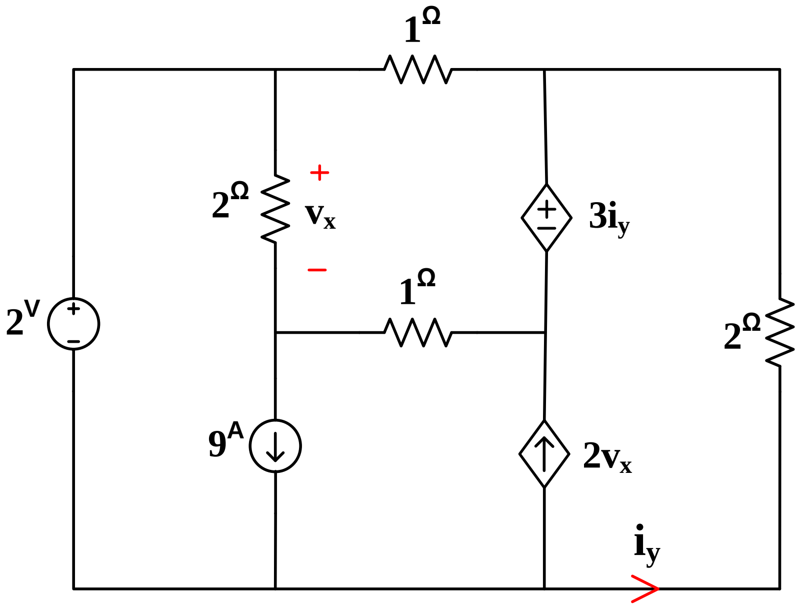
$$V=15v$$



- نمونه مداری که در آن، جریان دو مش معلوم است و جریان مش سوم صرفاً مجهول است که با یک KVL به دست می آید. اگر در مدار فوق روش تحلیل گره به کار می بردیم ۳ متغیر مجهول ولتاژ گره بدست می آوردیم و باید سه معادله سه مجهولی حل می‌کردیم. پس در مدار داده شده روش **تحلیل مش** مناسب تر از روش تحلیل گره است.

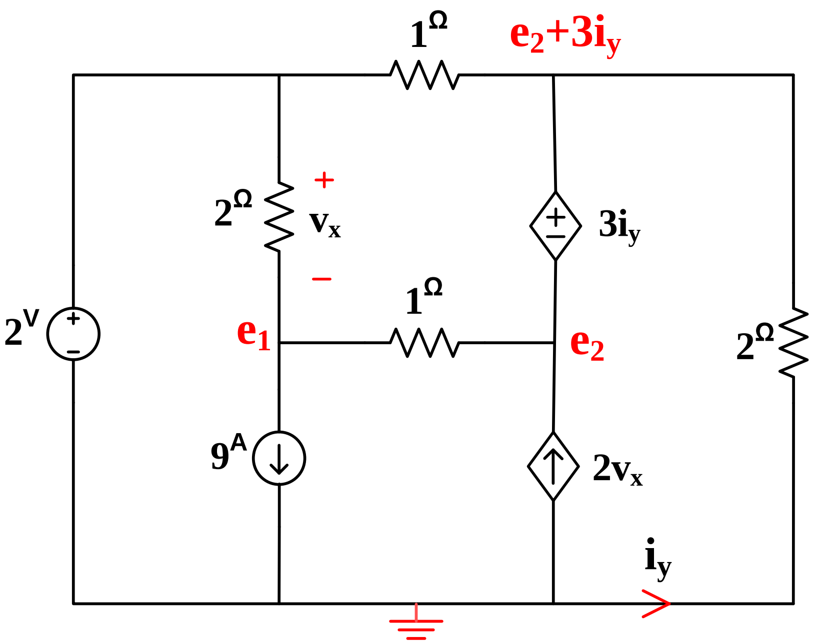
$$15\,i_3+10\,(i_3+35)+5(i_3-10)=0$$

$$i_3=-10A$$



❑ **مثال)** مدار مقابل را هم با تحلیل گره و هم با تحلیل مش حل کنید و مقایسه کنید کدام روش تحلیل ساده تر است.

■ **حل)**



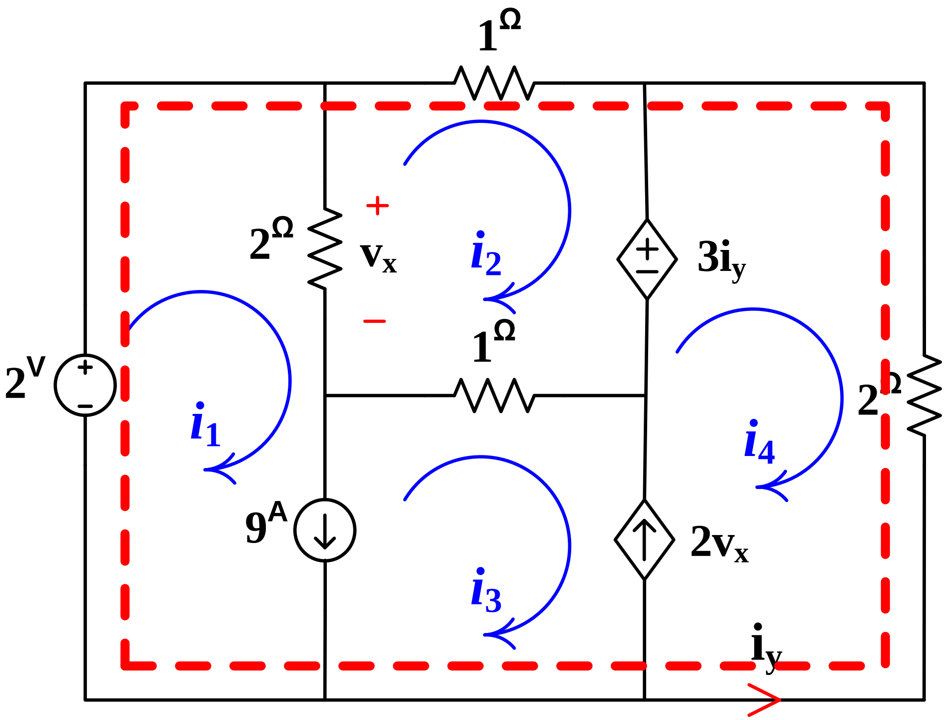
با استفاده از روش گره داریم:

$$v_x = 2 - e_1$$

$$i_y = -\frac{(e_2 + 3i_y)}{2}$$

و با اعمال KCL در گره ۱ و گره مرکب و حل معادلات خواهیم داشت:

$$e_1 = -2\ ,\ e_2 = 5$$



با استفاده از روش مش داریم:

$$v_x = 2(i_1 - i_2)$$

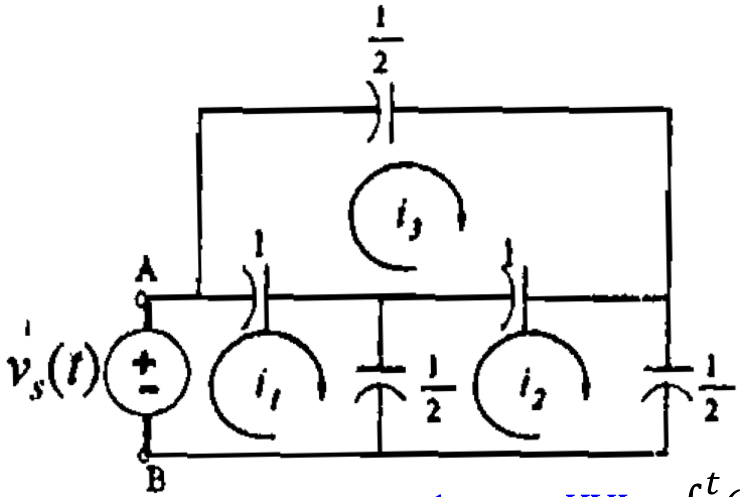
$$i_y = -i_4$$

و با اعمال KVL در مش ۲ و مش بیرونی و توجه به روابط منابع جریان خواهیم داشت:

$$i_1 - i_3 = 9 \qquad i_4 - i_3 = 2v_x$$

KVL در مش بیرونی: $i_2 + 2i_4 - 2 = 0 \quad \rightarrow i_1 = 2\,, i_2 = 0\,, i_3 = -7\,, i_4 = 1$

****



❑ **مثال)** خازن معادل دیده شده از دو سر A و B را به دست آورید.

■ **حل)**

اگر منبع ولتاژ $v_s(t)$ را در سر های A و B وصل کنیم با روش تحلیل مش خواهیم داشت:

KVL در مش 1 $\quad \int_0^t (i_1 - i_3)dt' + 2\int_0^t (i_1 - i_2)dt' = v_s(t)$

KVL در مش 2 $\quad 2\int_0^t (i_2 - i_1)dt' + \int_0^t (i_2 - i_3)dt' + 2\int_0^t i_2\, dt' = 0$

KVL در مش 3 $\quad 2\int_0^t i_3\, dt' + \int_0^t (i_3 - i_2)dt' + 2\int_0^t (i_3 - i_1)dt' = 0$

با فرض $(k=1,2,3)$:

$$\int_0^t i_k\, dt' = q_k$$

پس معادلات قبل به صورت زیر در می آیند:

$$\left.\begin{aligned} 3q_1 - 2q_2 - q_3 &= v_s(t) \\ -2q_1 + 5q_2 - q_3 &= 0 \\ -q_1 - q_2 + 4q_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad q_1 = \frac{19}{32} v_s$$

پس ظرفیت خازن معادل برابر $\frac{19}{32}$ فاراد بدست می آید.

****

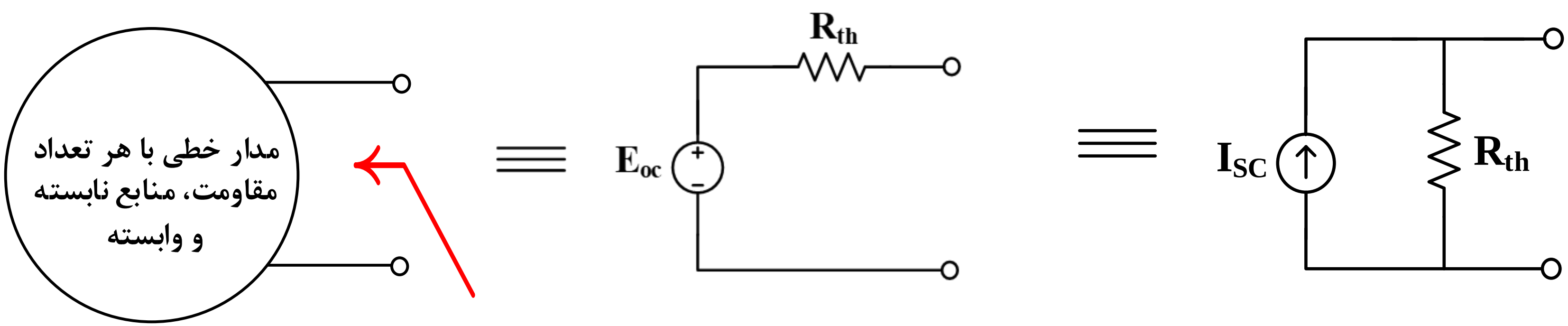
۲–۴– قضایای مهم مدارهای LTI

– مدارهای معادل تونن و نرتن

❑ فرض کنید درون تک قطبی داده شده، مداری با هر تعداد مقاومت خطی و منابع نابسته و وابسته وجود داشته باشد و بخواهیم رفتار این تک قطبی را فقط در سرهای A و B آن نمایش دهیم. این رفتار با دو مدار ساده زیر نشان داده می‌شود:

✓ مدار معادل تونن (Thevenin): اتصال سری یک مقاومت Rth و یک منبع ولتاژ Eoc؛

✓ مدار معادل نورتن (Norton): اتصال موازی یک مقاومت Rth و یک منبع جریان ISC؛



❖ E_{oc} ولتاژ دیده شده از دو سر مدار باز، در سرهای مورد نظر است.

❖ I_{SC} جریان گذرنده از اتصال کوتاه کردن سرهای مورد نظر (بالا به پایین) است.

❖ R_{th} مقاومت معادل دیده شده از دو سر مورد نظر است به شرط آنکه کلیه **منابع نابسته** را صفر کنیم.

❖ بین E_{OC} و I_{SC} ارتباطی به صورت مقابل وجود دارد (با داشتن دو مشخصه، می توان سومی را از رابطه زیر به دست آورد):

$$E_{OC} = R_{th} I_{SC}$$

- منبع ولتاژ نابسته صفر، معادل یک اتصال کوتاه است.
- منبع جریان نابسته صفر، معادل یک مدار باز است.

- هریک از مقادیر E_{oc} و I_{sc} و R_{th} را می‌توان با انجام تحلیل مداری جداگانه به دست آورد، لکن با توجه به شکل مدار معمولاً آن دوتایی که محاسبه آن‌ها ساده‌تر است تعیین و سپس سومی از رابطه میان آن‌ها به دست می‌آید.

✓ برای تعیین مقاومت تونن، باید منابع نابسته را صفر نمود. اما به دلیل حضور منابع وابسته، باید منبع ولتاژ و یا جریان تستی را به سرهای مورد توجه وصل کرد و ارتباط ولتاژ و جریان تست را به دست آورد. در این حالت و برای سادگی کار، اثبات شده است که می توان بدون صفر کردن منابع نابسته، یک رابطه خطی به صورت زیر را به دست آورد که مؤلفه های آن نیز عبارتند از:

$$V_t = \alpha I_t + \beta \longrightarrow \alpha = R_{th}\ ,\ \beta = E_{oc}$$

تونن ثابت کرد که:

- α همان مقاومت ورودی از دو سر تک قطبی داده شده N است (R_{th}).
- β همان ولتاژ مدار باز از دو سر تک قطبی داده شده N است (E_{oc}).

نرتن ثابت کرد که:

- α همان مقاومت ورودی از دو سر تک قطبی داده شده N است (R_{th}).
- β/α جریان شاخه اتصال کوتاهی است که وقتی دو سر مذکور از مدار تک قسبی با یک شاخه اتصال کوتاه وصل شوند، در جهت بالا به پایین از آن می‌گذرد (I_{sc}).

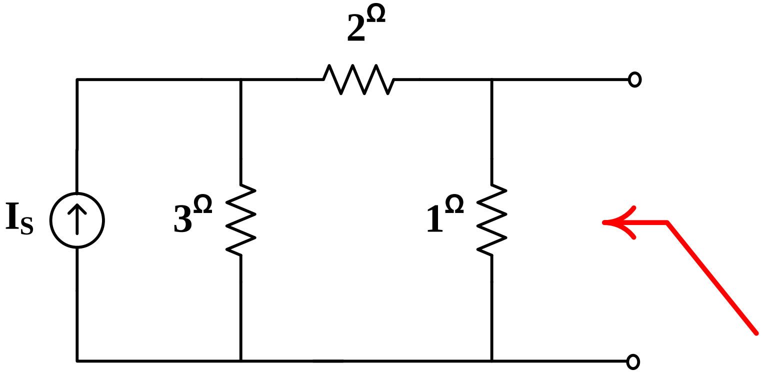
❖ توجه شود که اگر هدف صرفاً یافتن R_{th} باشد، با صفر کردن تمام منابع نابسته می توان یک منبع ولتاژ آزمایشی V_t را به دو سر مدار متصل کرد و با به دست آوردن جریان گذرنده از آن (I)، مقدار مقاومت R_{th} را به صورت زیر به دست آورد:

$$R_{th} = \frac{V_t}{I}$$

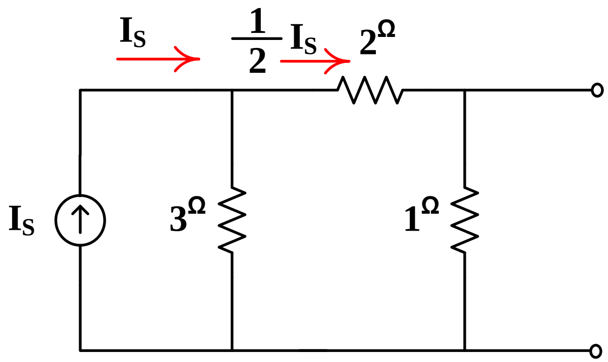
❖ این کار با صفر کردن تمام منابع نابسته و اتصال یک منبع آزمایشی جریان (I_t) و تعیین ولتاژ دو سر آن (V) و در نهایت تعیین R_{th} به صورت زیر نیز قابل حصول است:

$$R_{th} = \frac{V}{I_t}$$

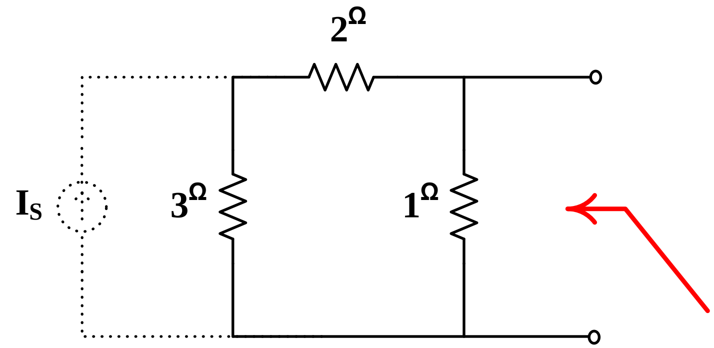
❑ **مثال)** مدار معادل تونن را از دو سر مورد نظر مدار شکل زیر تعیین کنید.



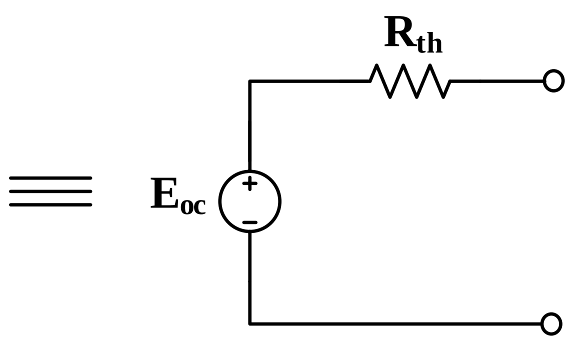
■ **حل)**



$$E_{oc} = \frac{1}{2} I_s \times 1^{\Omega} = \frac{1}{2} I_s$$



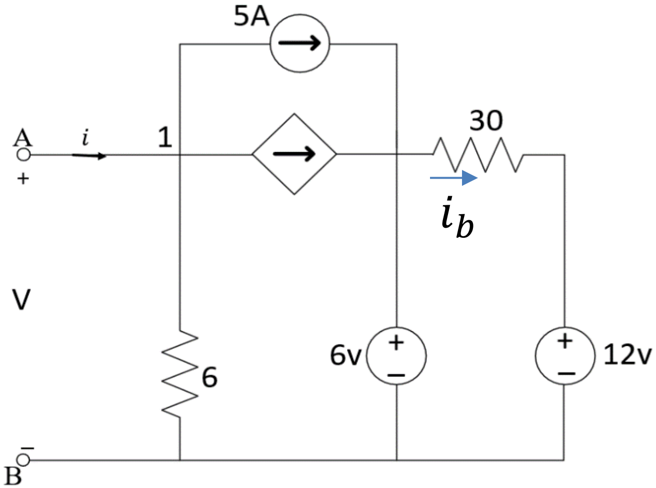
$$R_{th} = 5||1 = \frac{5}{6}$$



$$\begin{cases} E_{oc} = \dfrac{1}{2} I_s \\ R_{th} = \dfrac{5}{6} \Omega \end{cases}$$

****

❑ **مثال)** مدار معادل تونن را در سر های A و B مدار شکل زیر تعیین کنید.



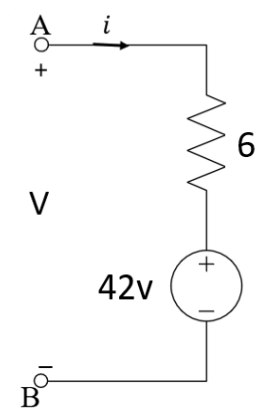
■ **حل)**

$$i_b = \frac{12-6}{30} = \frac{1}{5}$$

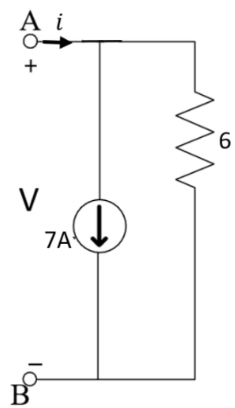
اعمال KCL در گره (۱):

$$\mathrm{i} = \frac{v}{6} + 5 + 10 i_b = \frac{v}{6} + 7 \quad \Rightarrow v = 6\mathrm{i} - 42$$

مدار معادل تونن:

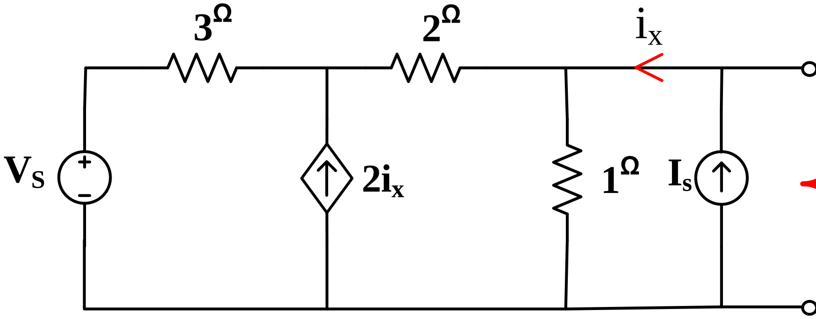


مدار معادل نرتن:

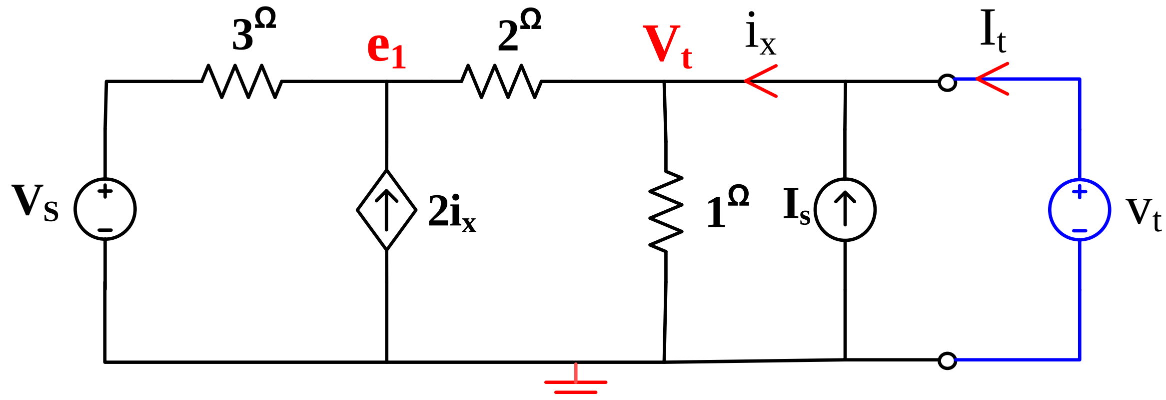


****

❑ **مثال)** مدار معادل تونن را از دو سر مورد نظر مدار شکل زیر تعیین کنید.



■ **حل)**



رابطه متغیر وابسته: $i_x = I_t + I_s$

KCL در گره (۱): $\dfrac{e_1 - V_s}{3} + \dfrac{e_1 - V_t}{2} - 2(I_t + I_s) = 0$

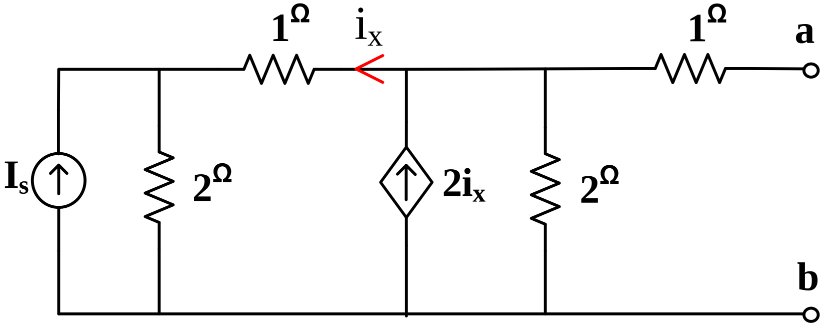
KCL در گره تست: $\dfrac{V_t - e_1}{2} + V_t - (I_t + I_s) = 0$

$$\xrightarrow[\text{خواهیم داشت}]{\text{با حذف e1}} \quad V_t = \frac{11}{6} I_t + \left(\frac{1}{6} V_s + \frac{11}{6} I_s\right)$$

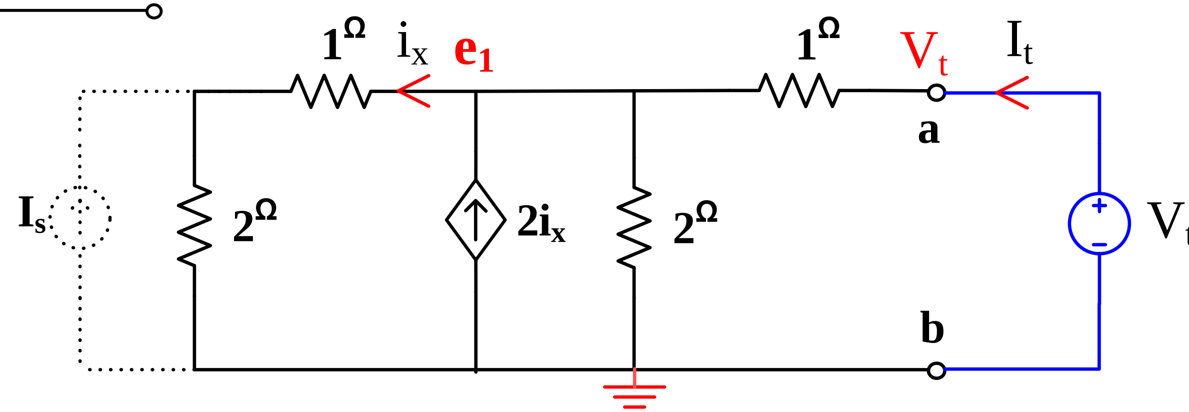
$$R_{th} = \frac{11}{6} \;,\; E_{oc} = \frac{1}{6} V_s + \frac{11}{6} I_s$$

****

❑ **مثال)** مدار معادل تونن را از دو سر مورد نظر مدار شکل زیر تعیین کنید.



■ **حل)**



رابطه متغیر وابسته: $i_x = \dfrac{e_1}{(1+2)} = \dfrac{e_1}{3}$

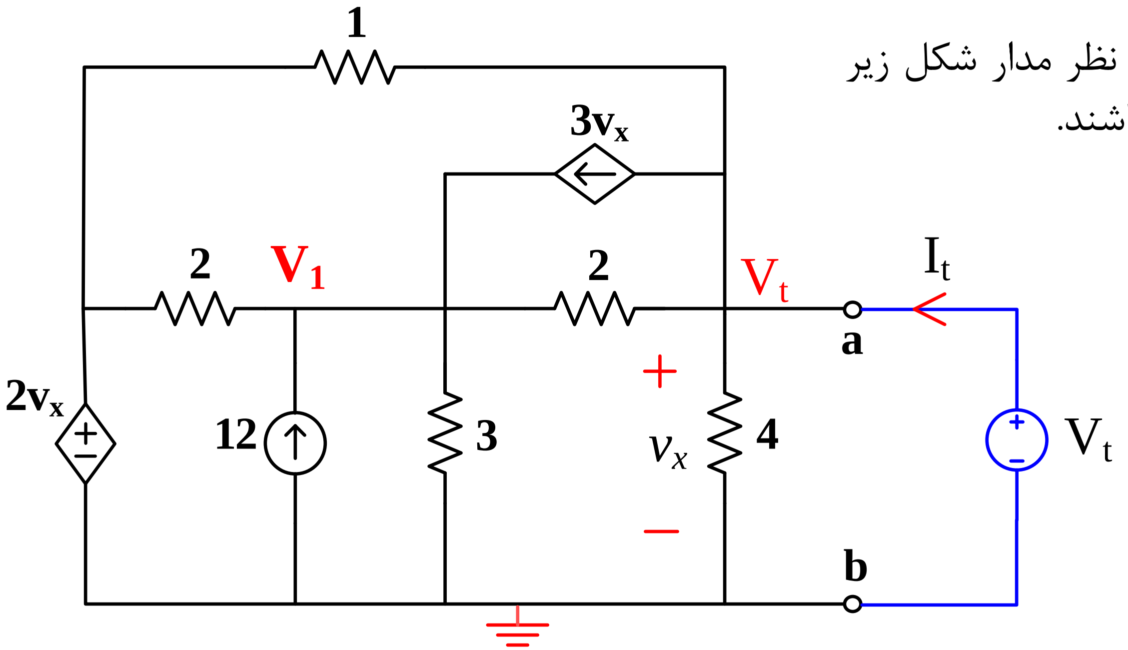
KCL در گره (۱): $i_x - 2i_x + \dfrac{e_1}{2} + (e_1 - V_t) = 0$

KCL در گره منبع تست: $I_t = (V_t - e_1) \rightarrow I_t = V_t - \dfrac{6}{7}V_t = \dfrac{1}{7}V_t$

$\rightarrow R_{th} = 7\,\Omega$

****

❑ **مثال)** مدار معادل نورتن را از دو سر مورد نظر مدار شکل زیر تعیین کنید. مقاومت ها بر حسب مهو می باشند.



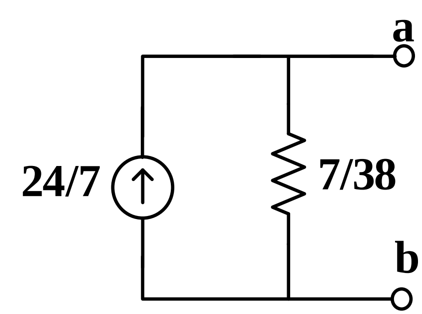
■ **حل)**

رابطه متغیر وابسته: $v_x = V_t$

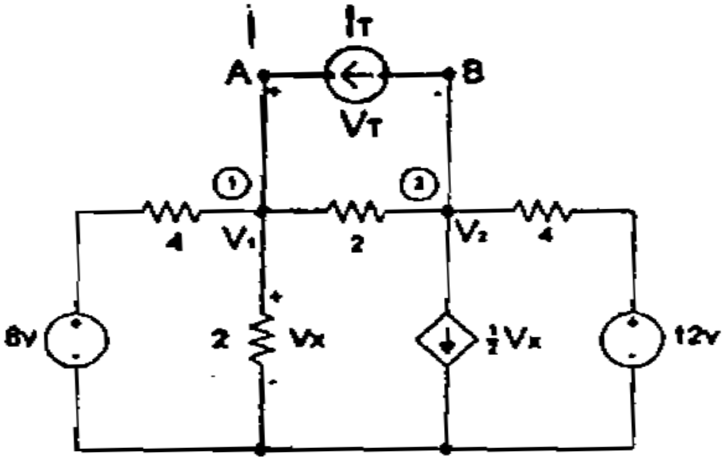
KCL در گره (۱): $2(V_1 - 2V_t) + 2(V_1 - V_t) + 3V_1 - 12 - 3V_t = 0$

KCL در گره منبع تست: $2(V_t - V_1) + 4V_t + 3V_t + (V_t - 2V_t) - I_t = 0$

$\xrightarrow{\text{حذف } V_1}$ $V_t = \frac{7}{38} I_t + \frac{24}{38} \rightarrow \begin{cases} E_{OC} = \frac{24}{38} \\ R_{th} = \frac{7}{38} \end{cases}$ or $\begin{cases} I_{SC} = \frac{24}{7} \\ R_{th} = \frac{7}{38} \end{cases}$



****



❑ **مثال)** مدار معادل تونن شکل مقابل را در سرهای A و B با محاسبه همزمان R_{th} و E_{oc} به دست آورید.

■ **حل)**

منبع جریان I_T را در سرهای A و B وصل و ولتاژهای V_1 و V_2 را بدست می‌آوریم.

KCL در گره 1: $\frac{V_1-6}{4}+\frac{V_1}{2}+\frac{V_1-V_2}{2}=I_T$

KCL در گره 2: $\frac{V_2-12}{4}+\frac{V_2-V_1}{2}+\frac{V_1}{2}+I_T=0$

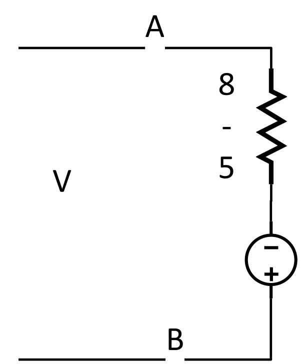
$$V_2=\frac{12-4I_T}{3}$$

$$V_1=\frac{42+4I_T}{15}$$

$$V_T=V_1-V_2=\frac{24I_T-18}{15}=\frac{8}{5}I_T-\frac{6}{5}$$

$$R_{th}=\frac{8}{5}$$

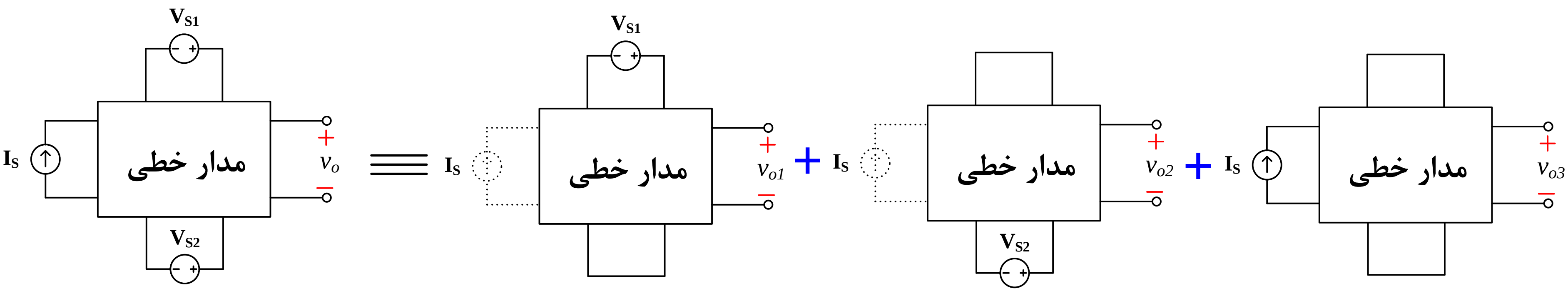
$$E_{oc}=-\frac{6}{5}$$



****

– قضیه جمع آثار

❑ **قضیه جمع آثار (Superposition):** پاسخ حاصل از اعمال همزمان دو یا چند منبع نابسته در یک مدار LTI، برابر مجموع پاسخ‌های حاصل از اعمال هریک از این منابع به تنهایی است، به شرطی که سایر منابع را صفر کنیم.



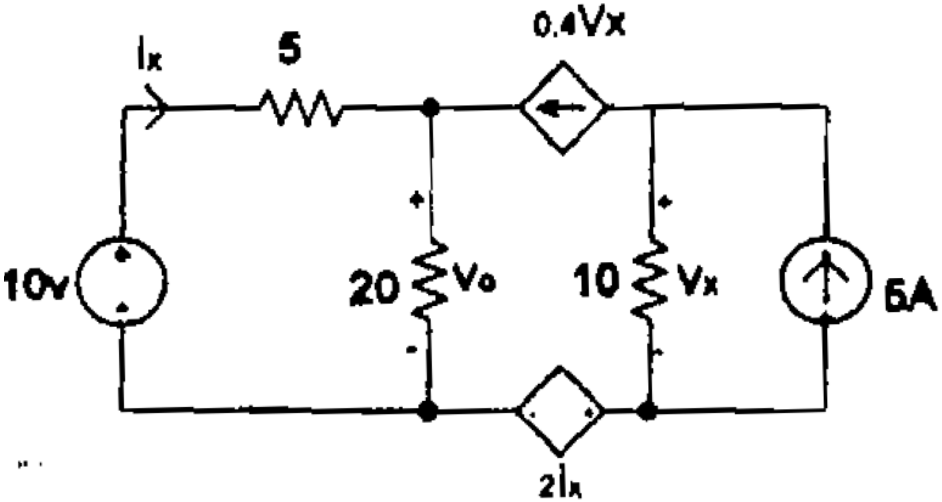
$$v_o = v_{o1} + v_{o2} + v_{o3}$$

❖ **تبصره ۱:** در اعمال قضیه جمع آثار به هنگام صفر کردن منابع برای تعیین اثر هر منبع، با منابع وابسته کاری نداریم، فقط اثر منابع نابسته را تک تک پیدا می‌کنیم.

❖ **تبصره ۲:** برای صفر کردن یک منبع ولتاژ آن را اتصال کوتاه، و برای صفر کردن یک منبع جریان آن را مدار باز می‌کنیم.

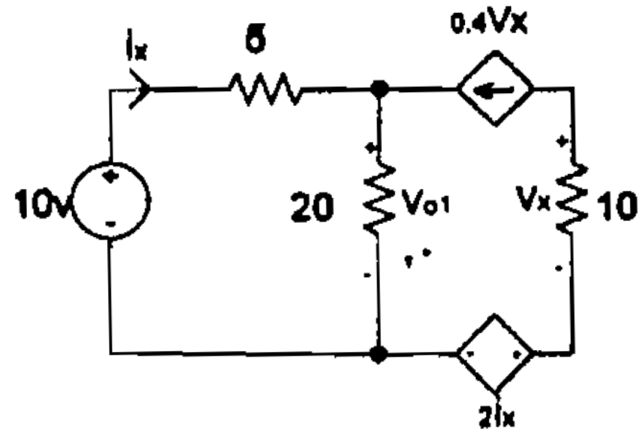
❖ **تبصره ۳:** توجه شود که برای حل یک مدار، لزومی ندارد این کار حتماً انجام شود و می توان مدار را با روش های گره و مش به صورت یک باره حل کرد. اما این قضیه، روشی برای ساده سازی مدارهای پیچیده می باشد.

❑ **مثال)** ولتاژ خروجی V_0 مدار شکل مقابل را با استفاد
از جمع آثار به دست آورید.



■ **حل)**

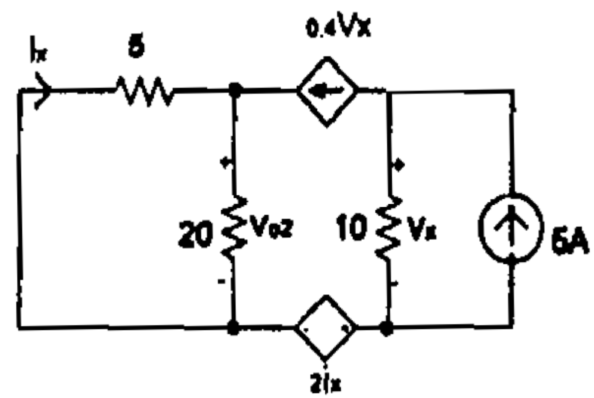
الف) اثر تنهای منبع ولتاژ ۱۰ ولتی



$$V_x = -(10)(0.4V_X) \Rightarrow V_x = 0$$

$$V_{o1} = \frac{20}{20+5} \times 10 = 8V$$

ب) تنهای منبع ولتاژ جریان ۵ آمپری



$$V_x = 10(5-0.4V_X) \Rightarrow V_x = 10$$

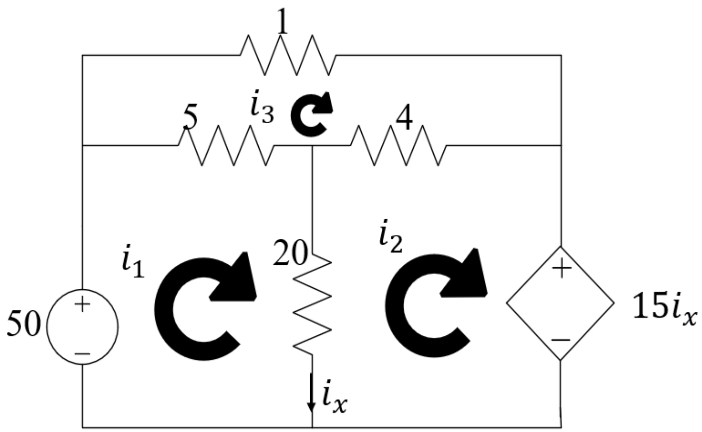
$$V_{o2} = \frac{5}{20+5} \times 20 \times 4 = 16$$

$$V_o = V_{o1} + V_{o2} = 8 + 16 = 24$$

****

– قضیه جانشینی

❑ **مثال)** در مدار مقابل، مقاومت ها بر حسب اهم می باشند. مدار را تحلیل کنید.



■ **حل)**

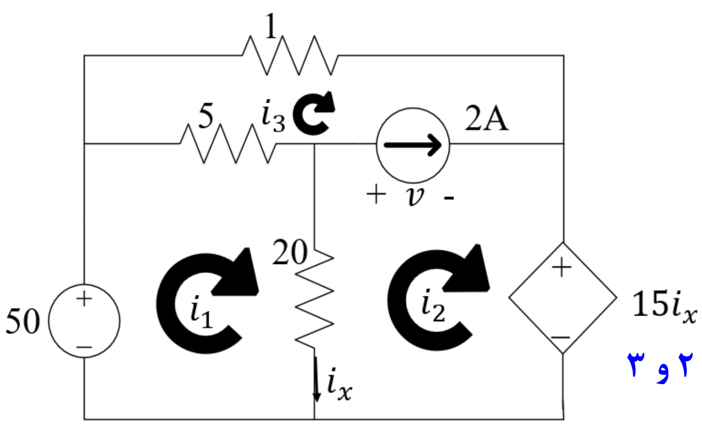
KVL در مش ۱ : $5(i_1 - i_3) + 20(i_1 - i_1) = 50$

KVL در مش ۲ : $4(i_2 - i_3) + 15(i_1 - i_2) + 20(i_2 - i_1) = 0$

KVL در مش ۳ : $i_3 + 4(i_3 - i_2) + 5(i_3 - i_1) = 0$

$\longrightarrow$ $i_1 = 19.6A$, $i_2 = 18A$, $i_3 = 16A$

****



❑ **مثال)** در مدار مقابل، مقاومت ها بر حسب اهم می باشند. مدار را تحلیل کنید
(**نمونه ای از قضیه جانشینی**).

■ **حل)**

KVL در مش ۱ : $5(i_1 - i_3) + 20(i_1 - i_1) = 50$

KVL در مش مرکب ۲ و ۳ : $20(i_2 - i_1) + 15(i_1 - i_2) + i_3 + 5(i_3 - i_1) = 0$

$$i_2 - i_3 = 2$$

$\longrightarrow$ $i_1 = 19.6A$, $i_2 = 18A$, $i_3 = 16A$

در مش های ۲ و ۳ اگر KVL بنویسیم لازم است متغیر اضافی v در سر منبع جریان ۲ آمپری را منظور کنیم. پس از تکنیک مش مرکب استفاده کردیم.

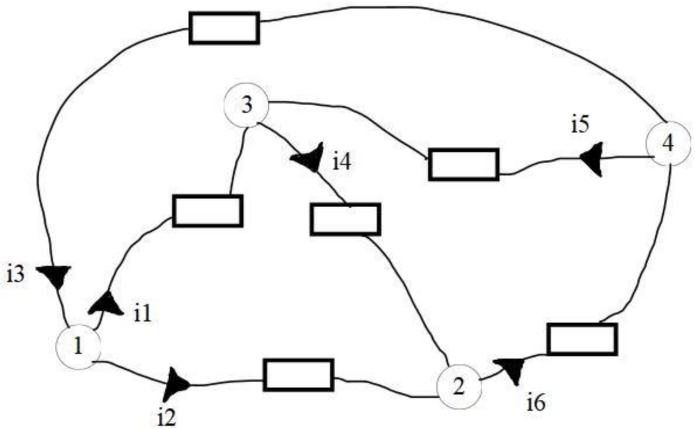
****

– قضیه تلگان

❑ **تعریف قضیه تلگان (Telegen): این قضیه، یکی از مصادیق کاربرد قوانین KVL و KCL است.** اگر جهت‌های قراردادی ولتاژ شاخه‌ها و جریان شاخه‌ها را در جهت‌های قراردادی متناظر انتخاب کنیم در این‌صورت مجموع حاصل ضرب های ولتاژ شاخه در جریان شاخه برای تمام شاخه‌ها برابر صفر است. یعنی برای تمام t:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k(t) i_k(t) = 0$$

- b تعداد شاخه هاست.



❑ **مثال)** صحت قضیه تلگان در مدار فشرده روبرو را بررسی نمایید. یعنی:

$$\sum_{k=1}^{6} v_k i_k = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 + v_6 i_6 = 0$$

- **حل)**

با انتخاب جریان‌های مستقل شاخه‌ها i_1 و i_2 و i_4 داریم:

در گره ۱ $\text{KCL: } i_3 = i_1 + i_2$

در گره ۲ $\text{KCL: } i_6 = i_2 + i_4$

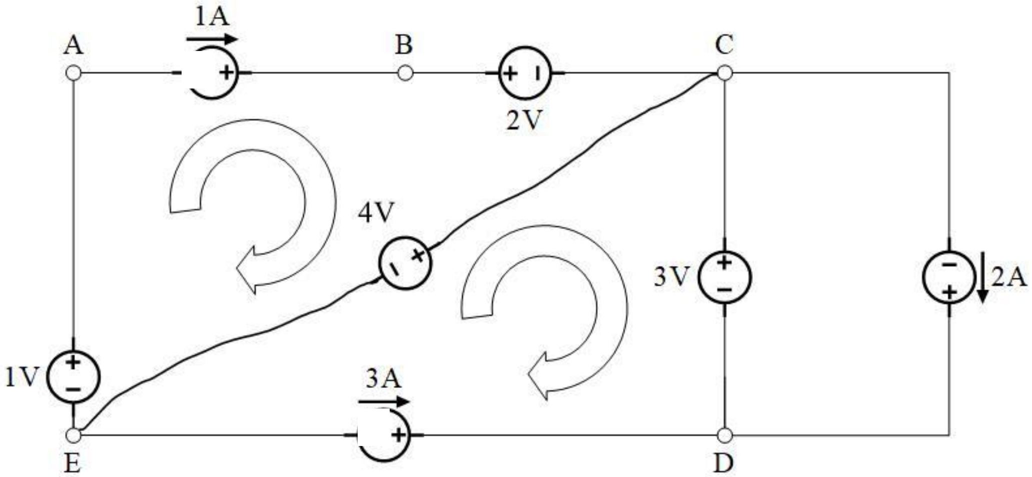
در گره ۳ $\text{KCL: } i_5 = -i_1 + i_4$

با جایگزینی این مقادیر در رابطه اصلی و دسته بندی کردن جملات به دست می‌آوریم:

$$i_1(v_1 + v_3 - v_5) + i_2(v_2 + v_3 + v_6) + i_3(v_4 + v_5 + v_6) = 0$$

جملات داخل پرانتز بنابر KCL صفر هستند و قضیه اثبات می‌شود.

****



❑ **مثال)** صحت قضیه تلگان در مدار فشرده روبرو را بررسی نمایید.

■ **حل)**

D در گره KCL: $\quad i_{DC} = 3 + 2 = 5A$

B در گره KCL : $\quad i_{BC} = 1A$

C در گره KCL: $\quad i_{CE} = 5+1-2= 4A$

CDE در حلقه KVL : $\quad V_{DE} = 4 - 3 = 1V$

$ABCE$ در حلقه KVL : $\quad V_{AB} = 1 - 4 - 2= -5V$

منبع ولتاژ ۱ ولتی : $p_1 = 1 \times -1 = -1$ $\quad$:P_1 (می‌دهد)

منبع ولتاژ ۲ ولتی : $p_2 = 2 \times 1 = 1$ $\quad$: p_2 (می‌گیرد)

منبع ولتاژ ۳ ولتی : $p_3 = 3 \times -5 = -15$ $\quad$: p_3 (می‌دهد)

منبع ولتاژ ۴ ولتی : $p_4 = 4 \times 4 = 16$ $\quad$: p_4 (می‌گیرد)

منبع جریان ۱ آمپری : $p_5 = 1 \times -5 = -1$ $\quad$: p_5 (می‌دهد)

منبع جریان ۲ آمپری : $p_6 = 2 \times 3 = 6$ $\quad$: p_6 (می‌گیرد)

منبع جریان ۳ آمپری : $p_7 = -1 \times 3 = -3$ $\quad$: p_7 (می‌دهد)

روشن است که:

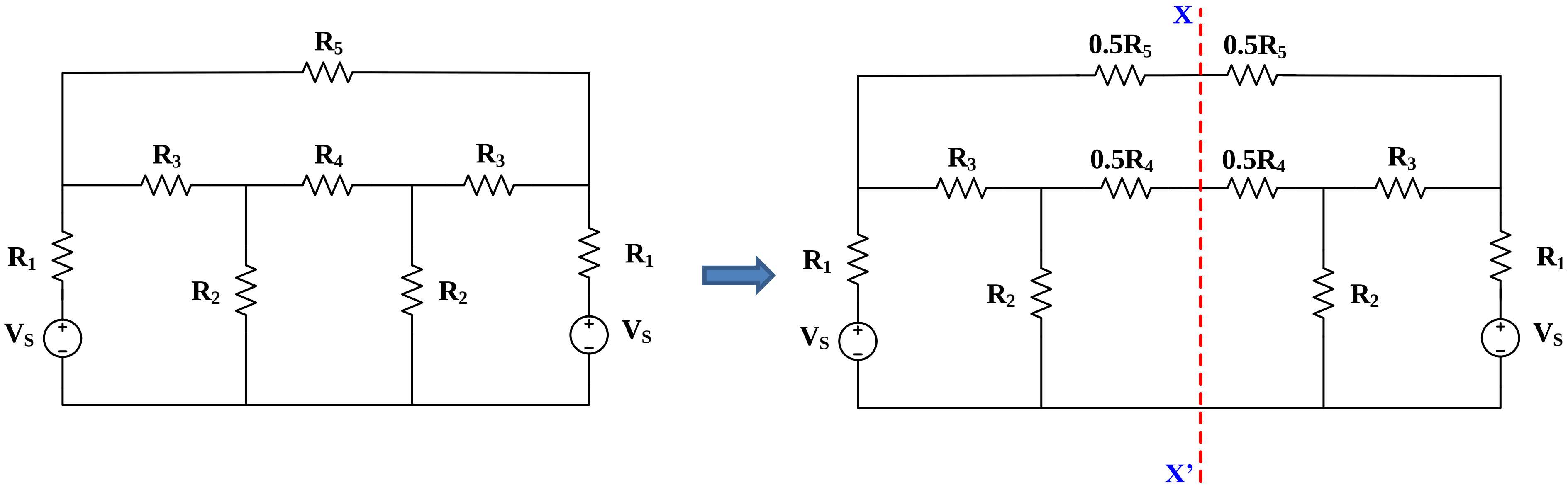
$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 = -1 + 2 - 15 + 16 - 5 + 6 - 3 = 0$$

که نشان‌دهنده‌ی اصل بقای توان است.

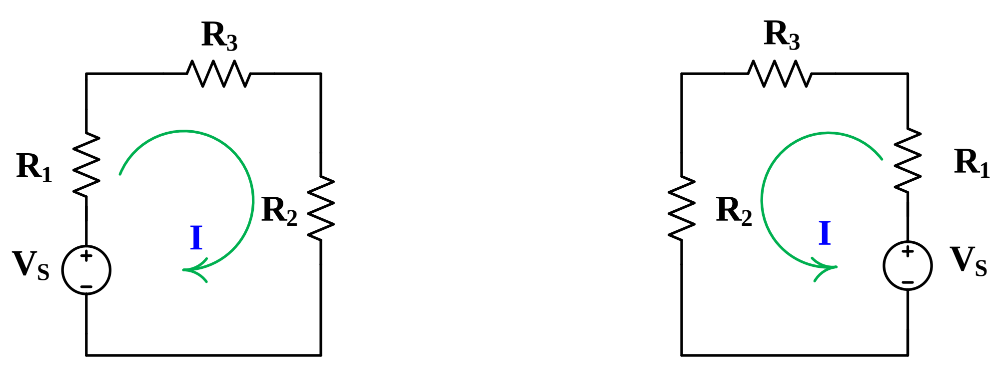
****

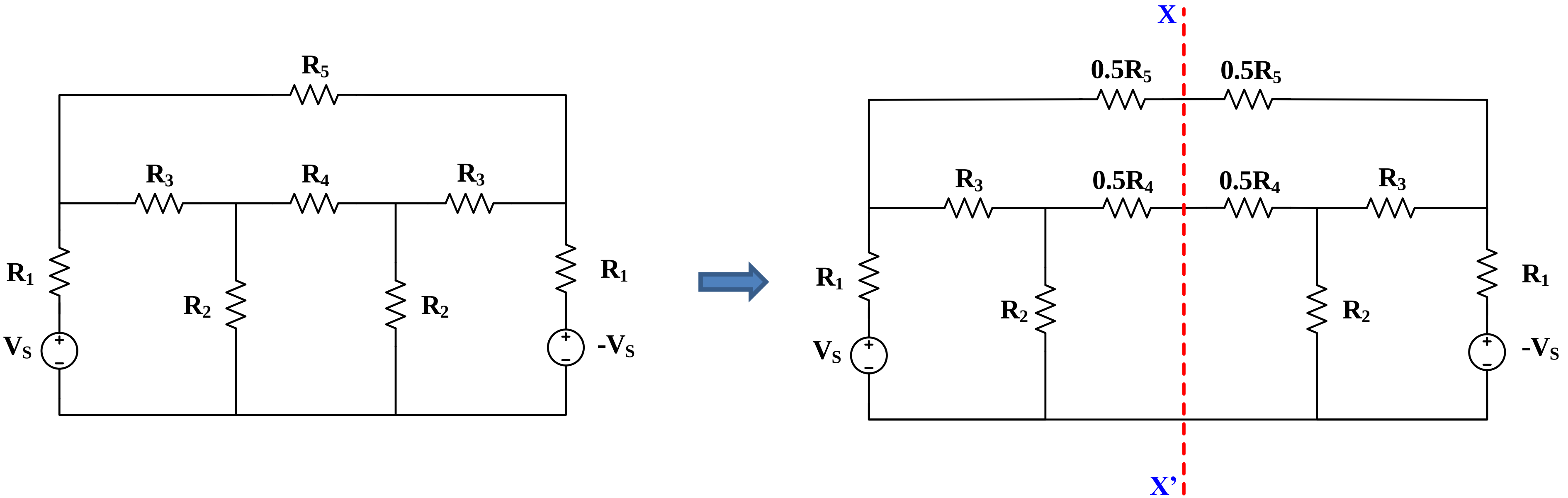
– استفاده از تقارن در تحلیل مدارها

- بعضی مدارها ممکن است تقارن ساختاری خاصی داشته باشند که شناخت این تقارن و استفاده از آن ممکن است تحلیل مدار تقارن را به مراتب ساده نماید.

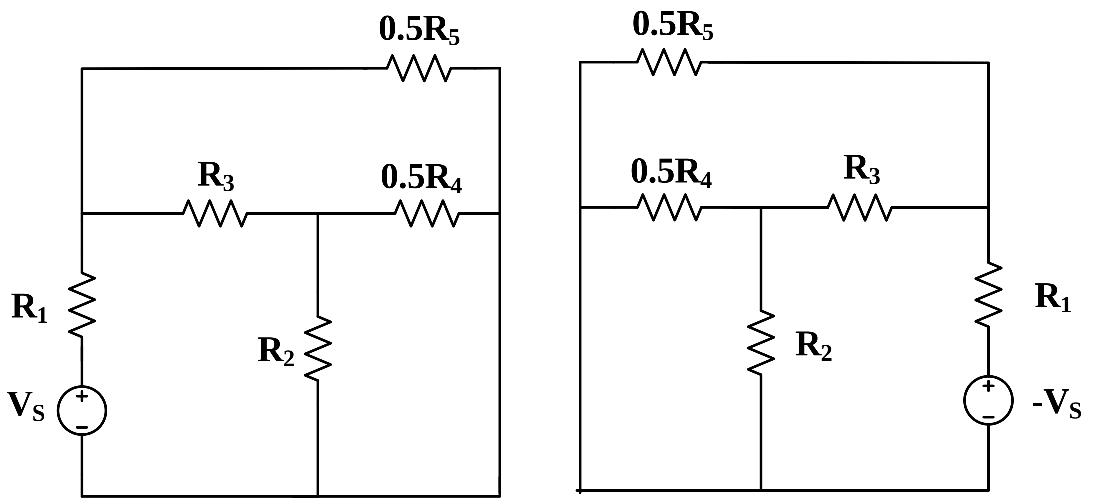


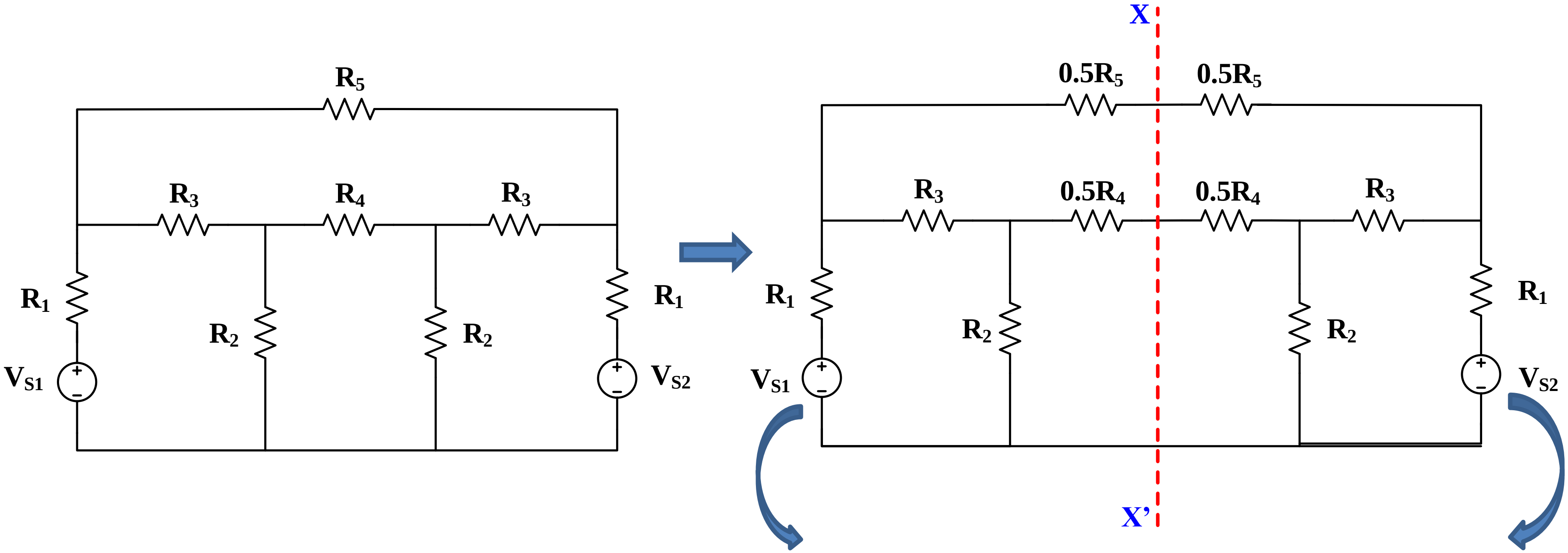
- تقارن نسبت به محور عمودی XX’ قابل رویت است. جریان ها در مسیرهای مقابل یکدیگر هستند. بنابراین جریان شاخه های افقی مشترک صفر بوده و در این شرایط جریان شاخه های R4 و R5 صفر خواهد بود.





❖ در تقارن فوق، جریان گذرنده از شاخه های افقی مشترک، در خلاف جهت یکدیگر بوده و پتانسیل ناشی از هر کدام از منابع در نقطه مشترک، قرینه یکدیگر است. در نتیجه پتانسیل در کلیه نقاط بر روی محور XX’ صفر خواهد بود.

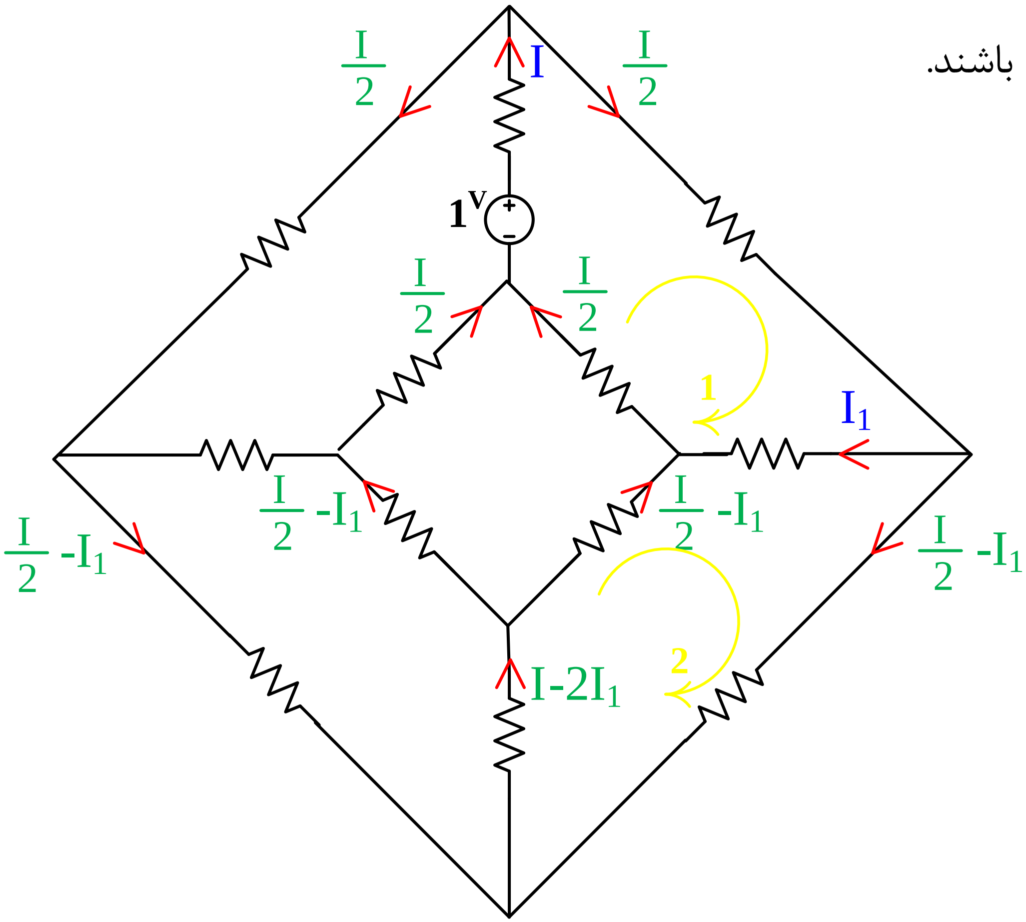




$$\frac{V_{S1}+V_{S2}}{2}+\frac{V_{S1}-V_{S2}}{2} \qquad\qquad \frac{V_{S1}+V_{S2}}{2}-\frac{V_{S1}-V_{S2}}{2}$$

- در حالت منابع متفاوت، می توان هر منبع را به صورت ترکیبی از هر دو منبع به صورت های بیان شده در شکل نوشت. حال با جمع آثار، یک بار اثر منابع هم علامت را در نظر گرفته و یک باز نیز اثر منابع مختلف العلامت را در نظر میگیرم. سپس با کمک **جمع آثار** می توان نتیجه نهایی را محاسبه نمود (در عبارت فوق، **ترم اول مد مشترک و ترم دوم مد تفاضلی نامیده می شود**).

❑ **مثال)** در مدار مقابل تمام مقاومت ها 1Ω می باشند.
مطلوبست تعیین I و I_1.



■ **حل)**

با توجه تقارن مدار، توزیع جریان در شاخه ها به شکل مقابل خواهد بود:

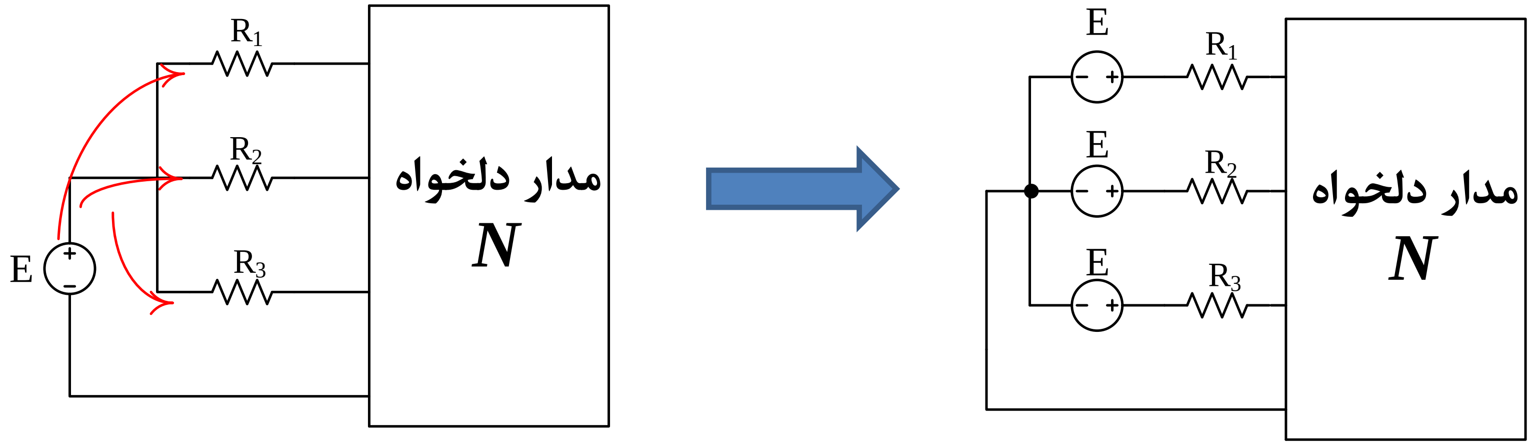
در مش ۱ KVL: $I + \frac{I}{2} + I_1 + \frac{I}{2} - 1 = 0$

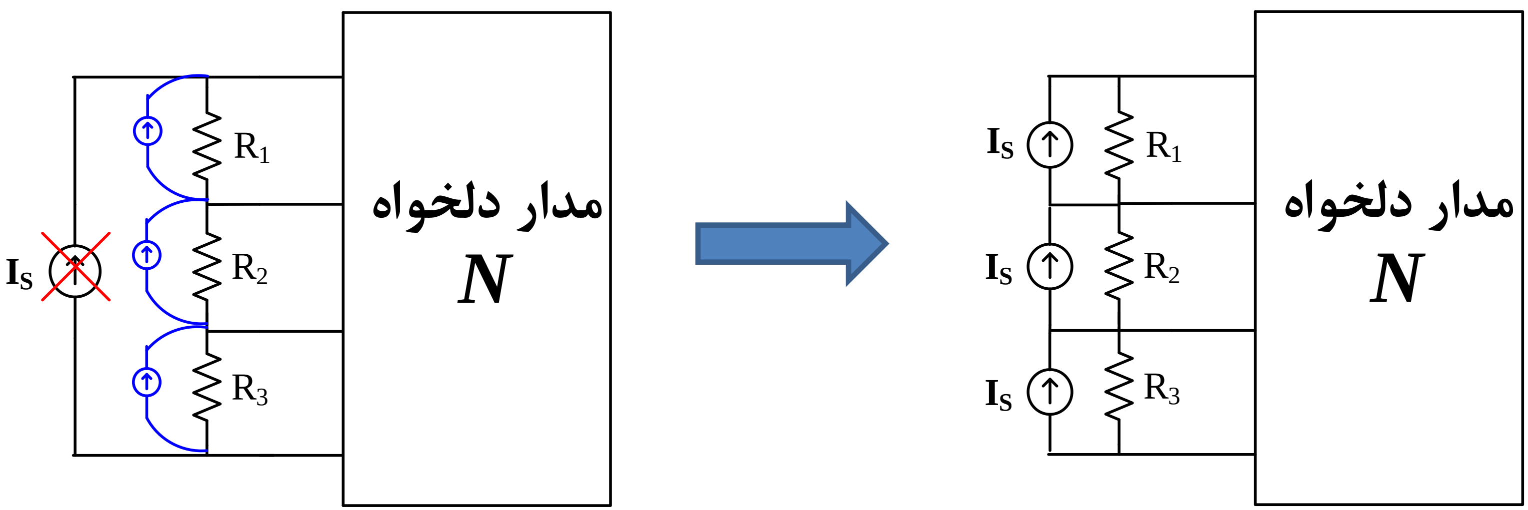
در مش ۲ KVL: $(\frac{I}{2} - I_1) + (I - 2I_1) + (\frac{I}{2} - I_1) - I_1 = 0$

$$\longrightarrow \begin{cases} I = \dfrac{5}{12} \\ I_1 = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

****

❑ **جابجایی (یا تبدیل) منابع:** یکی از راه های کاربردی در آسان سازی حل مسائل می باشد که در قالب دو شکل زیر می توان جابجایی منابع ولتاژ و جریان را به عنوان نمونه نشان داد.

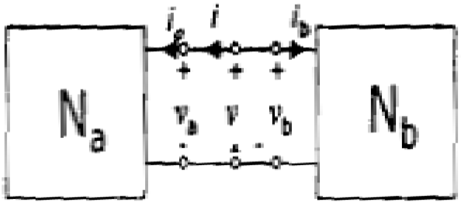




۲–۵– حل مدارهای غیرخطی

– تعیین نقطه کار در اتصال دو شبکه تک قطبی

- در به دست آوردن نقطه کار مشترک دو مدار تک قطبی N، بدیهی است راه اصلی به دست آوردن مختصات v و i مربوط به نقطه کار (Operating Point)، تلاقی محورهای iv دو مدار با یکدیگر است (یا به صورت فرمولی و یا به صورت ترسیمی). طبیعی است که اگر یک یا دو سر سر، مداری LTI باشد، به دست آوردن مدار معادل تونن/نورتن می تواند به دست آوردن نقطه کار را بسیار ساده تر نماید و این یکی از مزایای اصلی قضیه تونن/نورتن است. البته لازم به ذکر است که با توجه به نوع مشخصه توابع مربوط به هر کدام از شبکه ها می توان، یک یا چند و یا حتی هیچ تعداد نقطه کار را داشته باشیم.



مشخصه یک قطبی N_a: $f_a(v_a , i_a)=0$

مشخصه یک قطبی N_b: $f_b(v_b , i_b)=0$

$$v = v_a = v_b$$
$$i = i_a = -i_b$$

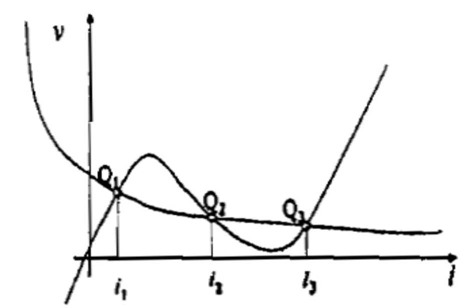
بنابراین مدار متشکل از دو یک قطبی با معادلات توصیف می‌شود.

$$f_a(v , i) =0$$
$$f_b(v , -i) =0$$

از حل این دو معادله جبری غیر خطی می‌توان v و i و نهایتا i_b و i_a و v_b و v_a را به دست آورد.

مثلاً اگر مشخصه‌های iv یک قطبی‌های N_a و N_b با معادلات $V_a=i_a(i_a-1)^2$ & $V_b=\frac{1}{10}e^{i}$ توصیف شود، برای به دست آوردن نقاط کار، دو تابع زیر باید با هم مساوی قرار گیرند.

$$\left.\begin{array}{l} V=\frac{1}{10}e^{-i} \\ V=i(i-1)^2 \end{array}\right\} i(i-1)^2=\frac{1}{10}e^{-i}$$



$$\rightarrow \quad Q_1=\begin{cases} I_1=0.114 \\ V_1=0.089 \end{cases} \quad Q_2=\begin{cases} I_2=0.749 \\ V_2=0.0472 \end{cases} \quad Q_3=\begin{cases} I_3=1.164 \\ V_3=0.0313 \end{cases}$$

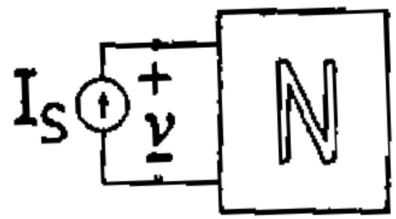
❑ **به عنوان یک مثال دیگر (ترسیمی) از این که تلاقی دو نقطه کار می توان یک یا چند و یا هیچ جواب داشته باشد، فرض کنید** اگر یک منبع جریان I_s به یک مدار تک قطبی N وصل شود، حالت های مختلف تلاقی منبع جریان با شبکه N را می توان در قالب موارد زیر بیان کرد:

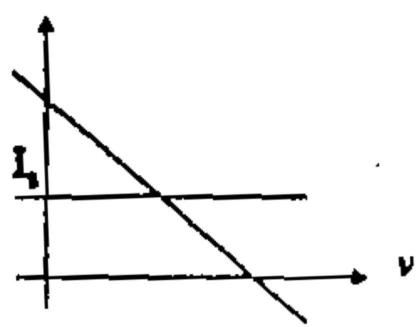
۱- اگر N یک یک قطبی خطی باشد، یعنی رابطه $V=\alpha i+\beta$ مشخص کننده روابط v و i دو سر آن باشد، می‌توان v را به طور یکتایی به دست آورد.

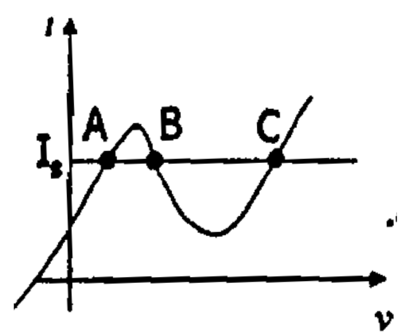
۲- اگر N غیرخطی کنترل شده با جریان باشد ($v=f(i)$)، یعنی می‌توان v را به طور یکتایی بدست آورد.

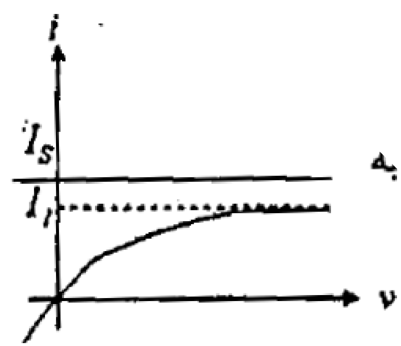
۳- اگر N غیرخطی کنترل شده با ولتاژ باشد، (مانند دیود تونلی)، در این صورت به‌ازای I_s داده شده می‌توان در نقاط A وB و C از مشخصه دیود تونلی کارکرد (نقطه کار) یعنی جواب یکتا نیست.

۴- اگر N غیرخطی کنترل شده با ولتاژ باشد که مشخصه vi مانند شکل مقابل داشته باشد و اگر جریان ورودی I_s بزرگتر از I_1 انتخاب شود، مشخصه داده شده را قطع نمی‌کند و بنابراین به ازای این مقدار I_s نقطه کار ندارد.

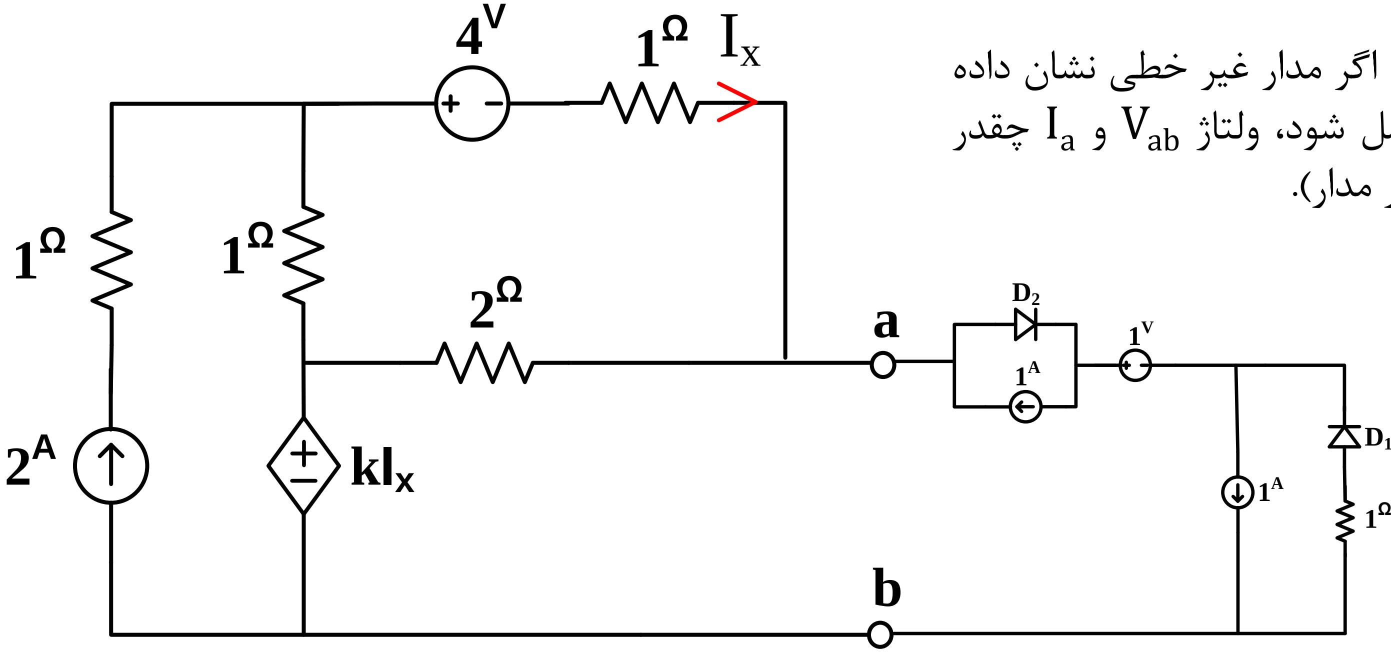




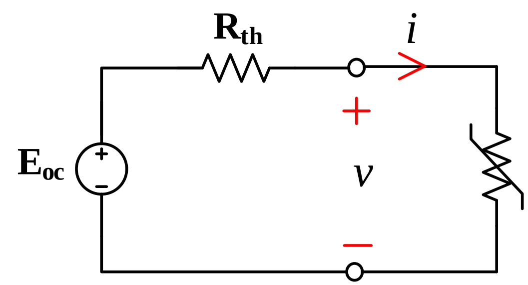




❑ **مثال)** در مدار شکل روبرو، اگر مدار غیر خطی نشان داده شده به سرهای a و b وصل شود، ولتاژ V_{ab} و I_a چقدر خواهد بود (تعیین نقطه کار مدار).



■ **حل)**



$$\begin{cases} I_x = i_1 \\ I_t = -i_2 \end{cases}$$

KVL در مش ۱: $4 + i_1 + 2(i_1 - (-I_t)) + (i_1 - 2) = 0$

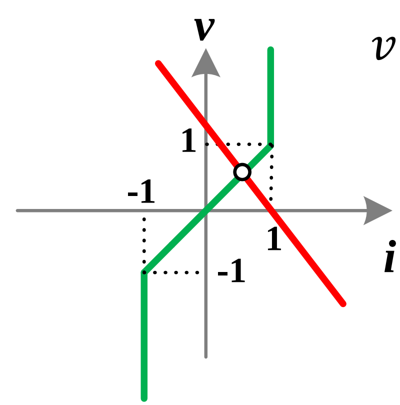
KVL در مش ۲: $2((-I_t) - i_1) + V_t - k(i_1) = 0$

حذف i_1 $\longrightarrow$ $V_t = (1 - \frac{k}{2})I_t - \left(1 + \frac{k}{2}\right) \longrightarrow$

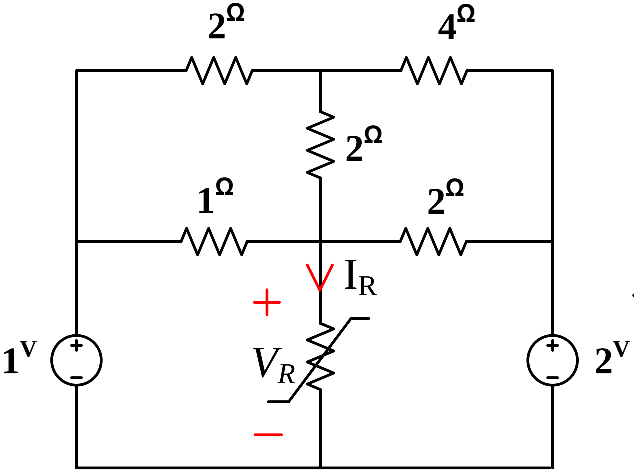
$$R_{th} = (1 - \frac{k}{2})$$

$$E_{oc} = -\left(1 + \frac{k}{2}\right)$$

$$v = E_{oc} - R_{th} i$$



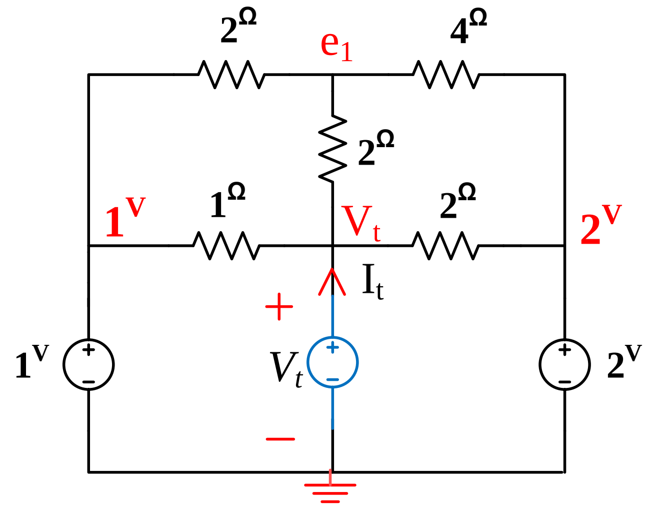
❑ **مثال)** نقطه کار مقاومت غیر خطی در شکل مقابل را پیدا کنید. مشخصه مقاومت غیر خطی به صورت زیر می باشد.



$$V_R = {I_R}^2 - \frac{5}{9} I_R$$

■ **حل)**

در این نوع مسائل راحت تر است مدار معادل تونن از دو سر مقاومت غیر خطی بدست آید.

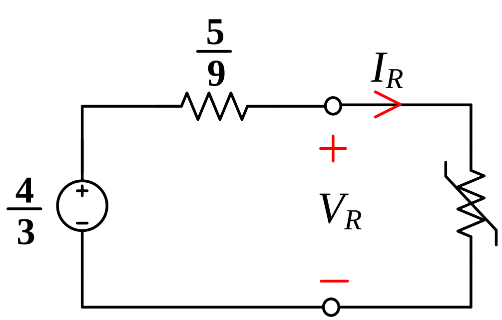


KCL: در گره e_1 $\quad \dfrac{e_1 - 1}{2} + \dfrac{e_1 - 2}{4} + \dfrac{e_1 - V_t}{2} = 0$

KCL: در گره V_t $\quad \dfrac{V_t - e_1}{2} + \dfrac{V_t - 2}{2} + \dfrac{V_t - 1}{1} - I_t = 0$

با حذف e_1 خواهیم داشت:

$$V_t = \frac{5}{9} I_t + \frac{4}{3}$$



KVL: در مش $\quad \dfrac{4}{3} = \dfrac{5}{9} I_R + V_R$

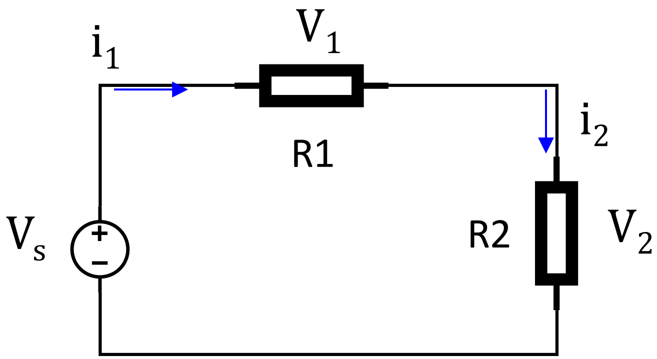
رابطه مقاومت غیر خطی: $\quad V_R = {I_R}^2 - \dfrac{5}{9} I_R$

$$I_R = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

****

– مفهوم مشخصه انتقال (Transfer Function)

❑ فرض کنید دو مقاومت غیر خطی R_1, R_2 را به طور سری به منبع ولتاژ $V_s(t)$ وصل می‌کنیم. تعیین ارتباط V_1 با $V_s(t)$ یا V_2 با $V_s(t)$ را مشخصه انتقال این مدار گویند.



$$V_1 = f_1(i_1) \longrightarrow V_1 = f_1(i) \quad (1)$$

$$V_2 = f_2(i_2) \longrightarrow V_2 = f_2(i) \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} V_s &= V_1 + V_2 \\ &= f_1(i_1) + f_2(i_2) \\ &= f_2(i) + f_2(i) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

اگر بتوان میان روابط (۱) و (۳) یا میان روابط (۲) و (۳) پارامتر i را به صورت تحلیلی حذف کرد، مشخصه انتقال V_1 برحسب V_s یا V_2 به دست می‌آید. اگر امکان حذف نباشد، می‌توان i را مقدار پارامتری در نظر گرفت و به‌ازای مقادیر مختلف i مقادیر V_s و V_1 را از معادلات (۱) و(۳) یا مقادیر V_s و V_2 را از معادلات (۲) و (۳) به دست آورد و نمایش ترسیمی مشخصه انتقال را رسم نمود.

مثلاً

$$V_1 = f_1(i_1) = i_1^{\,3} + i_1^{\,2} + i_1$$

$$V_2 = f_2(i_2) = i_2^{\,2} + 2i_2$$

$$\xrightarrow{\text{اگر هدف، به دست آوردن } V_2 \text{ برحسب } V_s \text{ باشد}}$$

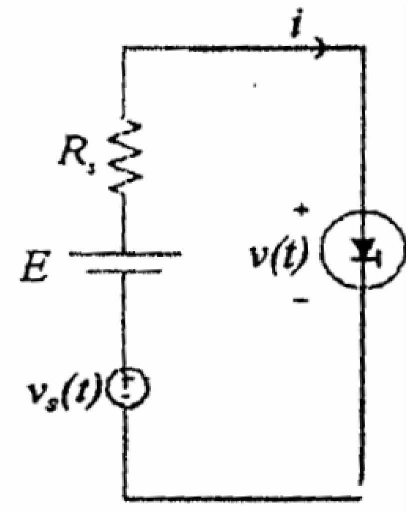
$$V_2 = i^2 + 2i \Rightarrow i = -1 \pm \sqrt{1 + V_2}$$

$$V_s = i^3 + 2i^2 + 3i$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری } i \text{ در رابطه } V_s} V_s = [-1 \pm \sqrt{1+V_2}]^3 + 2[-1 \pm \sqrt{1+V_2}]^2 + 3[-1 \pm \sqrt{1+V_2}]$$

که مشخصه مطلوب V_2 بر حسب V_s است.

– تجزیه و تحلیل مدارهای غیرخطی با استفاده از مدل سیگنال کوچک (Small Signal)



- در مدار غیرخطی مقابل فرض کنید منبع ولتاژ ثابت E و یک ولتاژ تغییرپذیر با زمان $v_s(t)$وجود دارد به قسمی که:

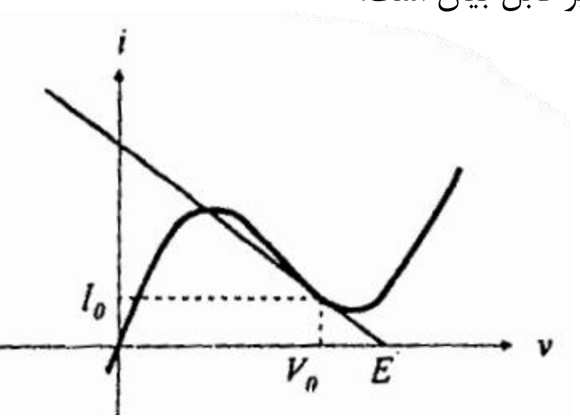
$$|v_s(t)| \ll E$$

یعنی ولتاژ تغییرپذیر با زمان در تمام زمان ها از نظر قدر مطلق به مراتب کوچکتر از منبع dc است. می‌خواهیم ولتاژ $v(t)$ دو سر دیود و جریان $i(t)$ گذرنده از ان را تعیین کنیم.
فرض کنید مشخصه دیود تونلی به صورت $i = g(v)$ توصیف شود.

با اعمال KVL به دست می آوریم:

$$E + v_s(t) = R_s \mathrm{i}(t) + v(t) \quad (1) \longrightarrow E + v_s(t) = R_s\big[g\big(v(t)\big)\big] + v(t) \quad (2)$$

در این معادله $v(t)$ تنها مجهول است. لیکن معادله غیرخطی است و برای هر زمان t با معلوم بودن $v_s(t)$ می‌توان آن را حل کرد. یک راه، حل مسئله با استفاده از روش سیگنال کوچک است که در این مسئله به صورت زیر قابل بیان است:



گام اول: اکنون اگر ورودی $v_s(t)$را صفر بگیریم داریم:

$$E = v(t) + R_s \mathrm{i}(t) \qquad (3)$$

$$i = g(v) \qquad (4)$$

می توان جواب را به طور ترسیمی از محل تلاقی مشخصه دیود با خط مستقیم توصیف شده با (۳) به دست آورد. نقطه (V_0, I_0) را نقطه کار مدار گویند. بدیهی است که در این نقطه کار:

$$I_0 = g(V_0)$$

$$E = V_0 + R_s I_0 \qquad (5)$$

گام دوم: اگر $v_s(t)$ را منظور کنیم چون $|v_s(t)| \ll E$ فرض شده می توان انتظار داشت پاسخ مدار در همسایگی نقطه کار قرار گیرد یعنی:

$$v(t) = V_0 + v_1(t)$$

$$i(t) = I_0 + i_1(t) \quad (6)$$

اکنون معادلات (۶) را در رابطه (۱) قرار داده و به دست می آوریم:

$$E + v_s(t) = R_s\big(I_0 + i_1(t)\big) + V_0 + v_1(t) \qquad (7)$$

با استفاده از معادله (۵) رابطه (۷) به صورت زیر ساده می شود:

$$v_s(t) = R_S i_1(t) + v_1(t) \qquad (8)$$

با قرار دادن معادلات (۶) در معادله ی (۴) داریم:

$$i_1(t) + I_0 = g\big(V_0 + v_1(t)\big) \qquad (9)$$

با بسط طرف راست معادله (۹) به صورت سری تیلور در اطراف نقطه ی v_0 به دست می آوریم:

$$i_1(t) + I_0 = g(V_0) + \left(\frac{dg}{dv}\right)|v_0\, v_1(t) + \text{جملات از مرتبه بالاتر} \qquad (10)$$

جمله ی $(dg/dv)|V_0$ **شیب مشخصه ی دیود تونلی** را در نقطه ی کار نشان می دهد.

$$d\,g/d\,v|v_o = G = \frac{1}{R} \qquad (11)$$

با صرف نظر کردن از جملات مرتبه بالاتر و استفاده از رابطه $I_0 = g(V_0)$ رابطه (۱۰) به صورت زیر خواهد شد:

$$i_1(t) = \frac{1}{R} v_1(t) \qquad (12)$$

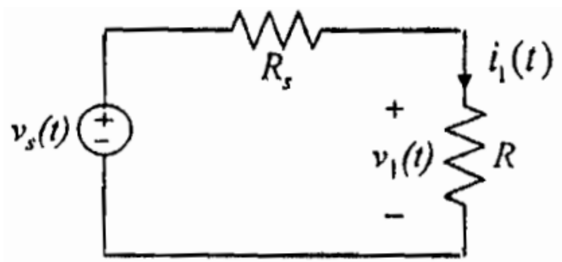
با قرار دادن (۱۲) در معادله (۸) به دست می آوریم:

$$i_1(t) = \frac{v_s(t)}{R_s + R} \qquad (13)$$

و در نهایت با استفاده از (۱۲) داریم:

$$v_1(t) = \frac{R}{R_s + R} v_s(t) \qquad (14)$$

پس می توان مدار معادل سیگنال کوچک روابط (۱۳) و (۱۴) را به صورت شکل روبرو رسم کرد و مدار غیر خطی را حول نقطه کار به صورت یک مدار خطی درآورده و تحلیل کرد:



این مدار را **مدار معادل سیگنال کوچک** در اطراف نقطه کار $(V_{0,}I_0)$ گویند.

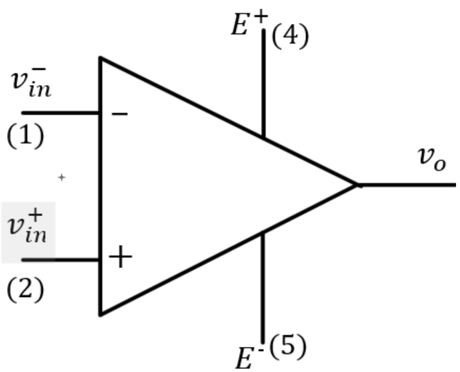
اگر مقادیر R_s و E چنان انتخاب شوند که نقطه کار دیود تونلی در در ناحیه ای قرار گیرد که در آن شیب منفی باشد $(G=1/R<0)$، می توان دید که با انتخاب مناسب R_s می توان مقدار $v_1(t)$ را بسیار بزرگتر از ولتاژ ورودی $v_s(t)$ تنظیم کرد. چون از منبع $v_s(t)$ و مقاومت R جریان یکسانی می گذرد، پس توان سیگنالی که به مقاومت تحویل داده شده، تقویت شده است. یعنی هنگامی که دیود تونلی در شیب منفی کار می کند، مدار به عنوان تقریت کننده (Amplifier) عمل می کند. بدیهی است که توان لازم برای تقویت کنندگی توسط منبع ولتاژ بایاس dc انجام می شود.

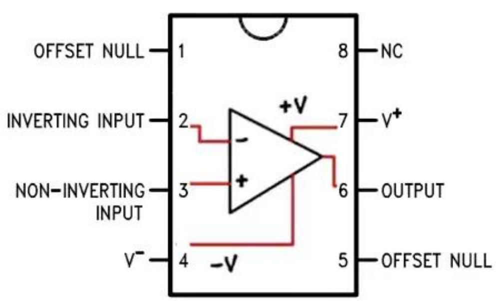
در چنین حالتی، قدرمطلق $\frac{R}{R_s+R}$ بزرگتر از یک بوده و آن را ضریب تقویت کنندگی نامند. منبع dc و R_s را مدار تغذیه یا بایاس (Bias) نامند که نقش اصلی آن، رسانیدن مدار به نقطه کار $(V_{0,}I_0)$ است.

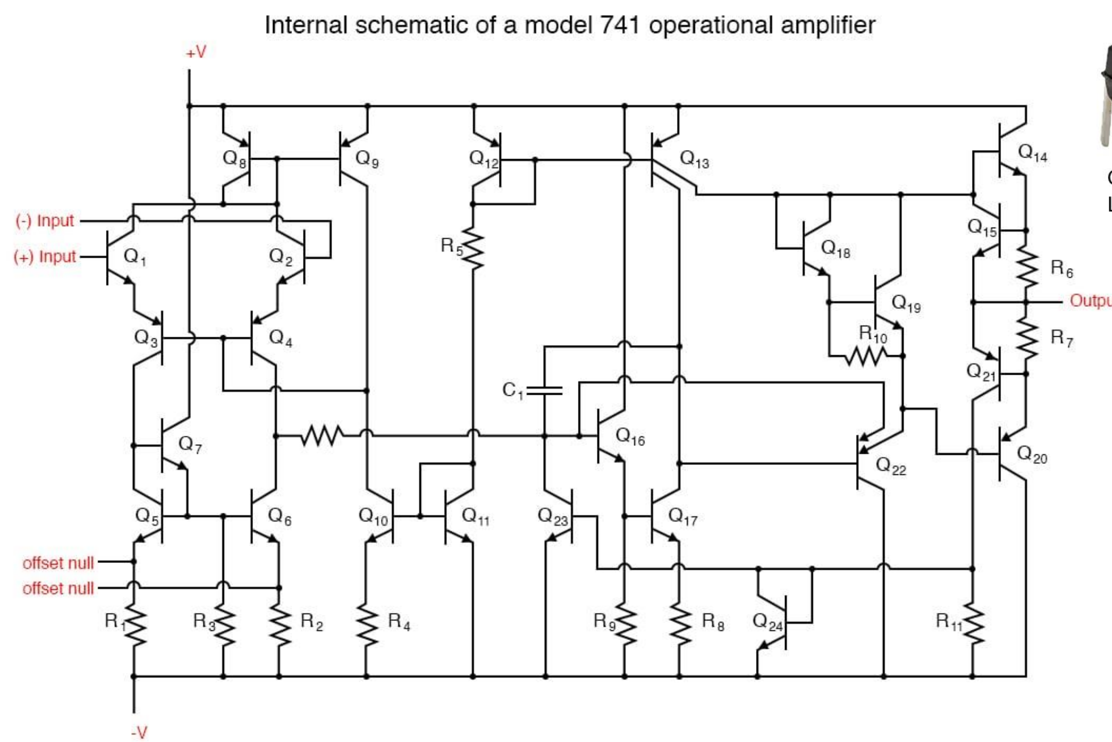
۲–۶– معرفی تقویت کننده عملیاتی (Op-Amp) و تحلیل مدارهای دارای Op-Amp

- در سالهای قدیم تقویت کننده های عملیاتی از بهم پیوستن ترانزیستورها و خازن ها و مقاومت ها ساخته می شد **(ساختمان های گسسته)**. ولی امروز بوسیله **مدار های مجتمع** بر روی یک **قطعه سیلیکون** چند میلیمتری ساخته می شود. مدار های مجتمع با فراهم آوردن **بلوک های ساختمانی کوچک** انقلابی در طراحی مدار های خطی ایجاد کرده اند. تقویت کننده های عملیاتی (Operational Amplifier) یکی از پرکاربردترین این ابزارها هستند. معمولا فقط تحلیل **مشخصه های سر** تقویت کننده های عملیاتی در تحلیل مدارها مورد نیاز است. ما تقویت کننده عملیاتی **ایده آل** را به صورت **یک المان مداری** مورد بررسی قرار می دهیم و تحلیل مدارهای درونی آن را به درس های بعدی واگذار می کنیم.

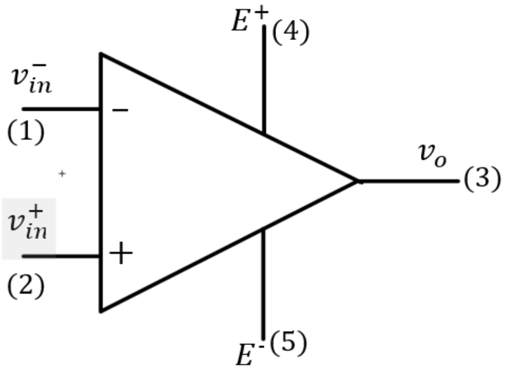
✓ هر Op-Amp **حداقل ۵ سر** باید داشته باشد (شکل روبرو). Op-Amp های موجود در بازار ممکن است **۸ سر یا بیشتر** داشته باشند. بعضی از سر ها ممکن است به هیچ محلی در درون آن وصل نشده باشد (**NC**). بعضی از سر های آن ممکن است برای تنظیم عملکرد در مدار داخلی آپ امپ بکار رود (***offset-null***).

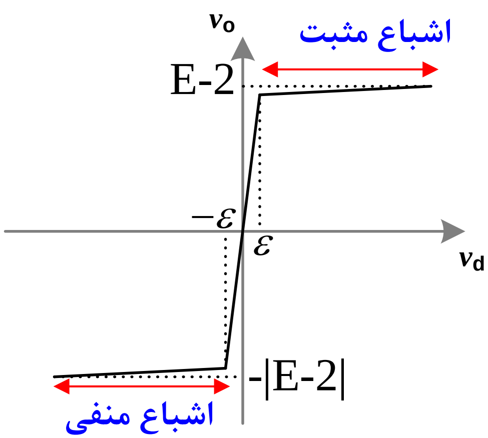




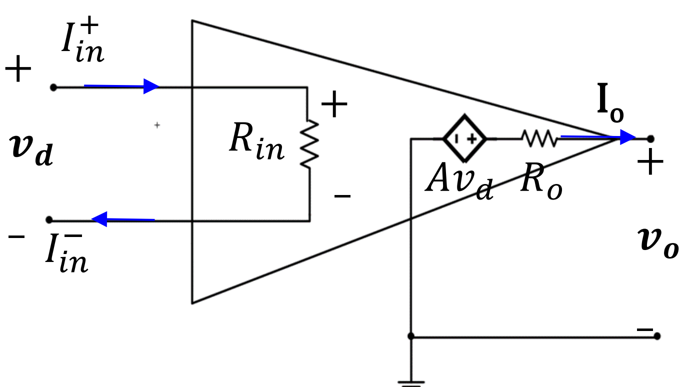


Op-Amp 741
LM 741





$$v_o = A \times v_d \quad -\varepsilon < v_d < \varepsilon$$



در مورد ساختار Op-Amp واقعی موارد زیر را می توان برشمرد:

- از طریق سر های 4 و 5 منابع تغذیه (بایاس ترانزیستورهای داخل) لازم برای کارکرد مناسب Op-Amp در نقطه کار مطلوب اعمال می شود که با E^+ و E^- نمایش داده شده است. مقادیر **متداول** ولتاژ تغذیه در حدود **۱۲ تا ۱۵** ولت است. منابع E^+ و E^- اثر خاصی روی سیگنال خروجی ندارند و در بسیاری از شکلهای مداری آنها را نشان نمی دهند.
- سر های ۱و۲ سر های ورودی هستند. هر سیگنالی که به سر ۱ وصل می شود علامت آن **معکوس** می شود. (سر معکوس کننده علامت)
- سر ۳، سر خروجی Op-Amp است که مقدار ولتاژ خروجی تابعی از $V_d = V_{in}^+ - V_{in}^-$ می باشد. ارتباط کلی تابعی v_0 و v_d یک ارتباط **غیرخطی** است. مگر برای مقادیر v_d کمتر از **چند دهم میلی ولت (ε)**. برای مقادیر کوچک v_d، ارتباط تابعی v_0 برحسب v_d یک تابع خطی است با شیب A و در حدود 10^5 (**بهره مدار باز**). برای مقادیر $v_d > \varepsilon$ مقدار v_0 به **حد اشباع** می رسد. برای آنکه Op-Amp اشباع نشود لازم است v_d کمتر از یک دهم میلی ولت باشد.
- در کاربردهایی که Op-Amp دارای **فیدبک منفی** می‌باشد، در ناحیه خطی می ماند. در کاربردهایی که فیدبک منفی Op-Amp بسته نشده باشد، رفتار Op-Amp مانند یک مقایسه کننده ولتاژ بوده و خروجی آن بسته به علامت V_d به اشباع مثبت یا منفی می رود.
- نمایی عملکردی از مشخصه های مهم داخلی Op-Amp واقعی در شکل روبرو نشان داده شده که براساس آن، مشخصه های مهم Op-Amp را می توان مشاهده نمود. مدار معادل نشان داد شده برای ناحیه خطی معتبر است. جریان خروجی I_o از طریق منابع تغذیه مثبت و منفی تامین می شود و ارتباطی به جریان پایه های مثبت و منفی ورودی ندارد. A بهره ولتاژ مدار باز و I_{in}^+ و I_{in}^- جریانهای ورودی در سرهای Op-Amp است. R_{in} مقاومت ورودی بوده که بسیار بزرگ است و R_o مقاومت خروجی است که مقدار کوچک باید داشته باشد. A بهره ولتاژ مداراباز است.

❑ **شکل روبرو را می توان به عنوان مدل ایده آل شده Op-Amp در نظر گرفت و فرض های زیر را بر آن اعمال کرد و با این فرض های مدارهای شامل Op-Amp ایده آل را حل کرد:**

✓ Op-Amp در ناحیه خطی کار می کند و به اشباع نمی رود.

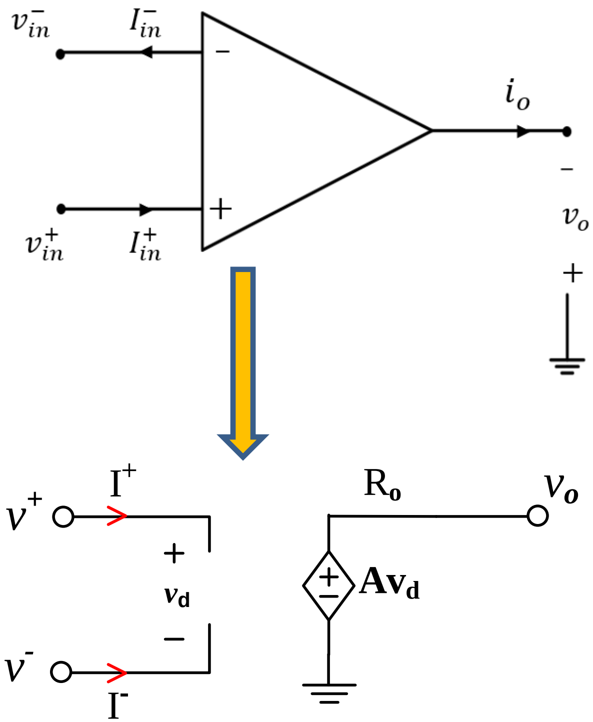
✓ تغذیه مدار اعمال شده و Op-Amp برای اجرای فرآیند تقویت کنندگی آماده است.

✓ بهره ولتاژ مدار باز A بی نهایت است.

✓ مقاومت ورودی بی نهایت است.

✓ مقاومت خروجی صفر است. در این حالت طبیعتاً جریان های ورودی آن I_{in} صفر است ($\boldsymbol{I_{in}^{-} = I_{in}^{+} = 0}$). و نتیجه دیگر این که ولتاژ $\boldsymbol{V_d = V_{in}^{+} - V_{in}^{-} = 0}$ و در نتیجه ولتاژ پایه منفی و مثبت مساوی می شود یعنی $V_{in}^{+} = V_{in}^{-}$. در این حالت گویند سرهای آپ امپ **اتصال کوتاه مجازی** شده است. گرچه هیچ اتصالی میان دو سر آن وجود ندارد. گاهی اتصال کوتاه مجازی پایه های مثبت و منفی را با نقطه چین نشان می دهند.

✓ جریان خروجی i_o غیر صفر است (حدود **چند میلی آمپر**). با اعمال KCL در گره خروجی آپ امپ می توان جریان خروجی را تعیین کرد. چون اعمال KCL در گره خروجی یک متغیر مجهول جریان خروجی را اضافه می کند بنابراین اگر هدف تعیین جریان خروجی نباشد در گره خروجی هیچ وقت KCL را ننویسید.



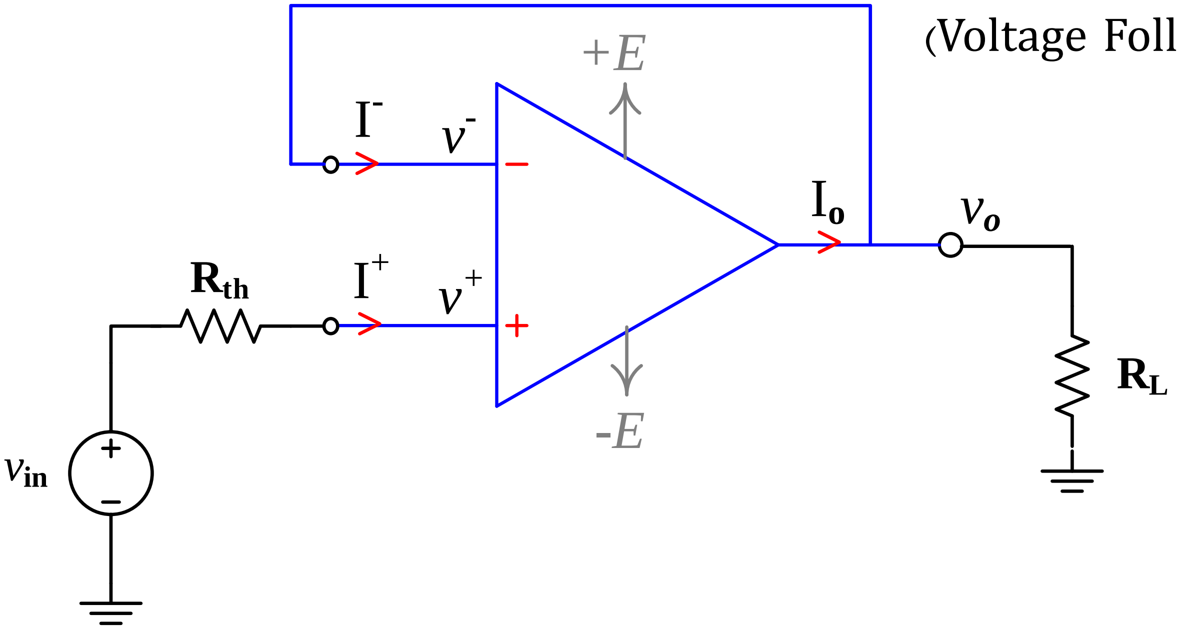
▪ **مدل آپ امپ ایده آل در حقیقت یک منبع ولتاژ وابسته با بهره بی نهایت است.**

❖ **خلاصه پیش فرض های تحلیل مدارهای با Op-Amp ایده آل:**

$$\left.\begin{cases} R_d = \infty \\ R_o = 0 \\ A = \infty \end{cases}\right\} \begin{matrix} v_o = Av_d \\ A \to \infty \end{matrix} \longrightarrow v_d = 0 \quad or \quad v^{-} = v^{+}$$

❖ بهره بسیار بالای Op-Amp، فیدبک منفی خروجی را لازم دارد یعنی جزئی از ولتاژ خروجی به ورودی Op-Amp فیدبک می شود و از ولتاژ ورودی کم می کند تا v_d را تشکیل دهد. **فیدبک همیشه به سر معکوس کننده علامت یعنی (–) اعمال می شود.**

❑ **مثال)** مدار تعقیب کننده ولتاژ (Voltage Follower) را تحلیل نمایید.



■ **حل)**

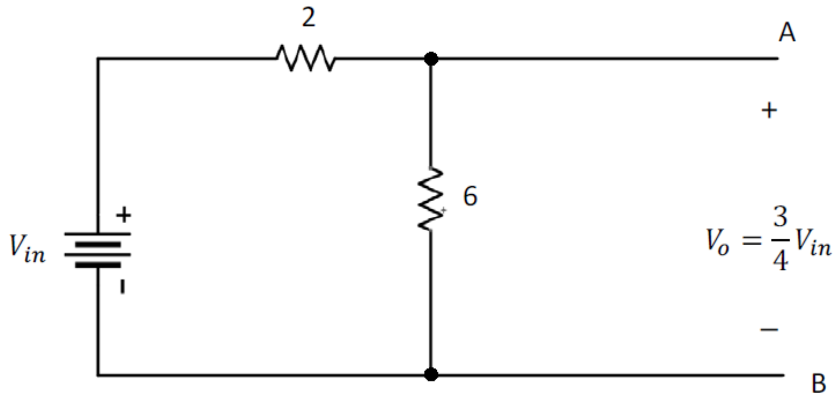
چون پایه منفی آپ امپ به خروجی اتصال پیدا کرده است، فیدبک منفی برقرار است و مدار در ناحیه خطی خواهد بود.

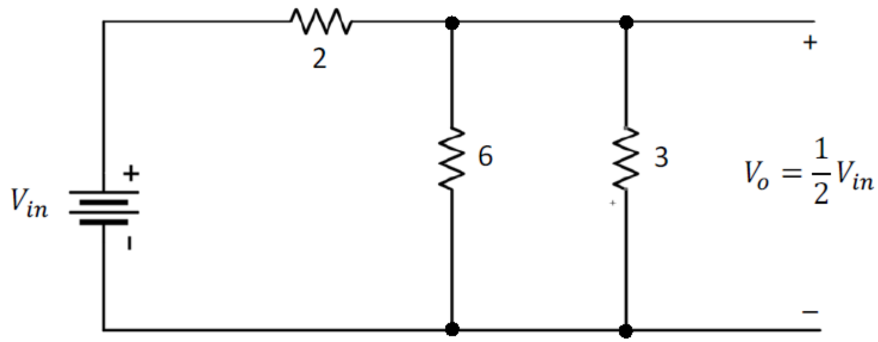
$$\left.\begin{array}{l} v^+ = v^- = v_o \\ I^+ = 0 \rightarrow v^+ = v_{in} \end{array}\right\} \longrightarrow v_o = v_{in}$$

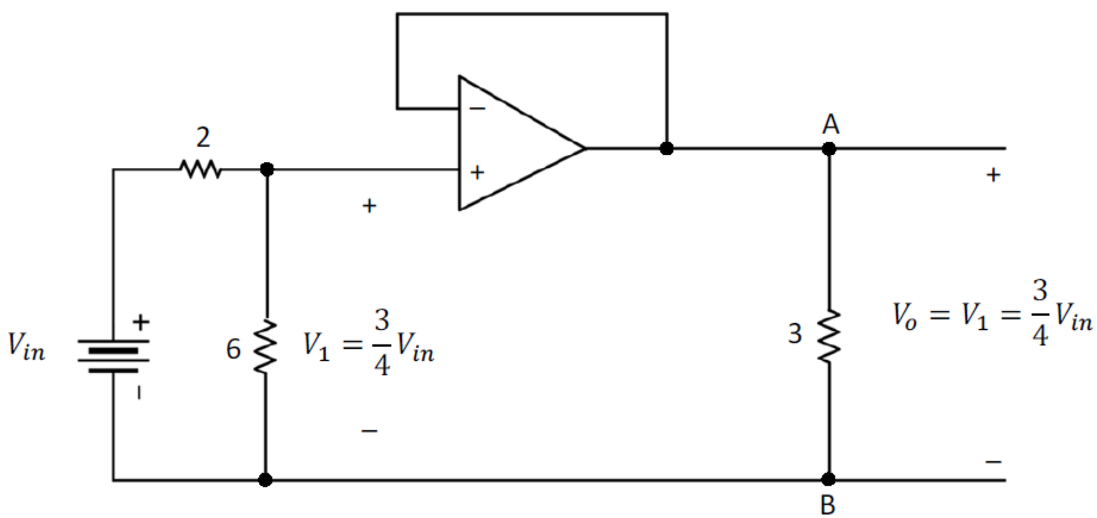
ویژگی مدار تعقیب کننده ولتاژ این است که مستقل از اندازه مقاومت باری که به خروجی وصل می شود، ولتاژ خروجی همیشه برابر با ولتاژ منبع ورودی می ماند. مدار تعقیب کننده ولتاژ را تقویت کننده **ایزوله کننده** نیز گویند که می تواند برای جلوگیری از اثر **بارگذاری** یک مدار روی مدار دیگر به کار رود. **به این ساختار، مدار بافر نیز گویند.**

****

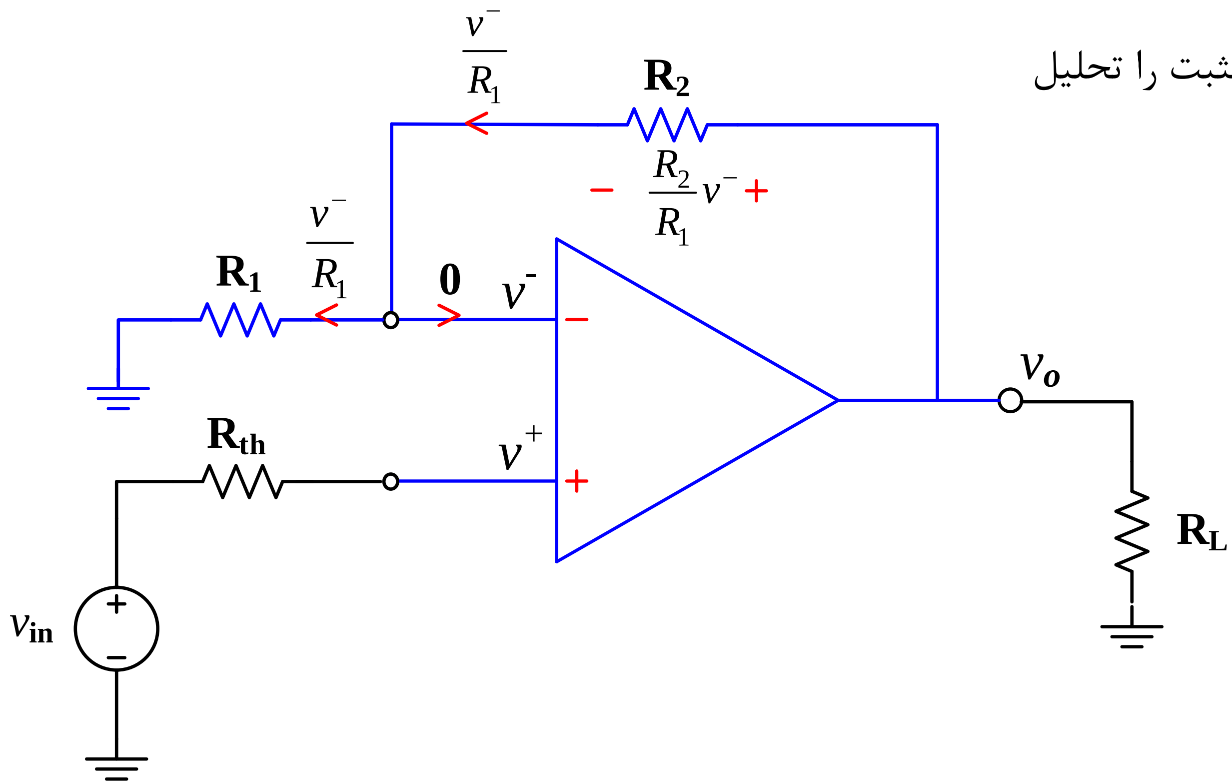
❖ **نکته مهم: نمایش کارکرد مدار بافر و مدیریت اثر بارگذاری یک طبقه مدار روی طبقه دیگر با یک مثال:**







❑ **مثال)** مدار تقویت کننده با علامت مثبت را تحلیل نمایید.



■ **حل)**

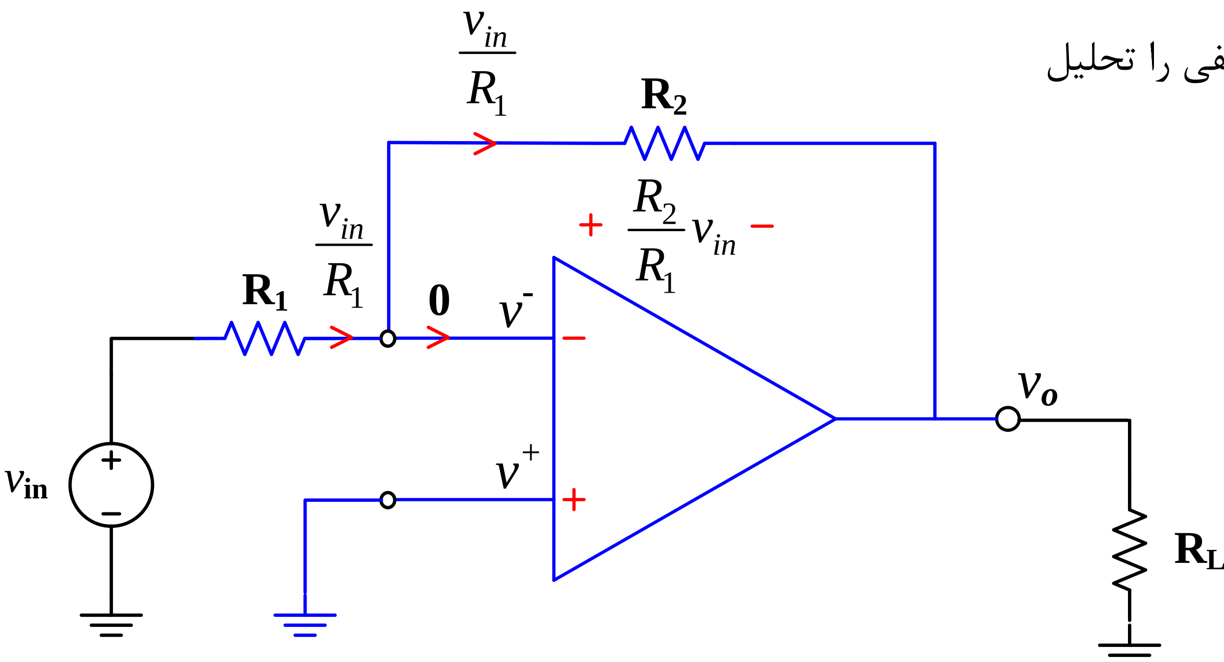
چون پایه منفی آپ امپ از طریق R_2 به خروجی اتصال پیدا کرده است، فیدبک منفی برقرار است و مدار در ناحیه خطی است.

$$\left.\begin{aligned} v^- &= v^+ \\ I^- = I^+ &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{KCL در گره منفی ورودی}} \left.\begin{aligned} v_o &= v^- + \frac{R_2}{R_1}v^- \\ v^- &= v^+ = v_{in} \end{aligned}\right\} \longrightarrow v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_{in}$$

تا وقتی که خروجی آپ امپ اشباع نشود مانند تقویت کننده رفتار می کند.

****

❑ **مثال)** مدار تقویت کننده با علامت منفی را تحلیل نمایید.



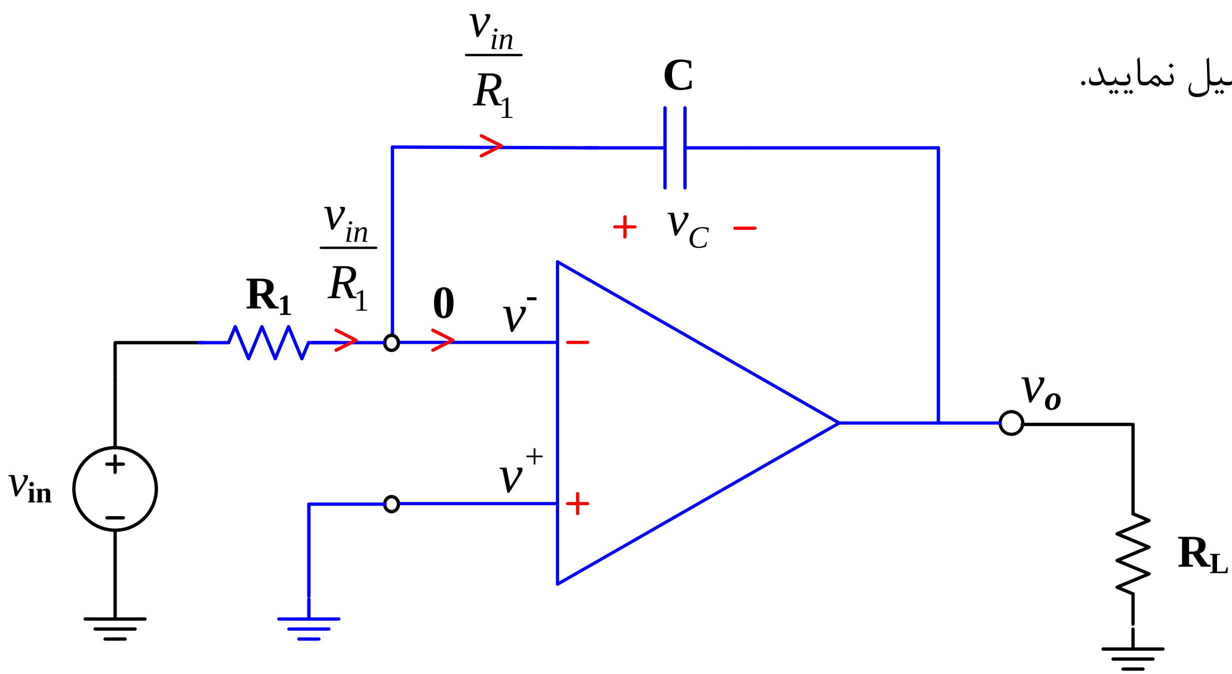
■ **حل)**

چون پایه منفی آپ امپ از طریق R_2 به خروجی اتصال پیدا کرده است، فیدبک منفی برقرار است و مدار در ناحیه خطی است.

$$\left.\begin{array}{l} v^- = v^+ = 0 \\ I^- = I^+ = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{KCL در گره منفی ورودی}} v_o = 0 - \frac{R_2}{R_1}v_{in} \longrightarrow v_o = -\frac{R_2}{R_1}v_{in}$$

****

❑ **مثال)** مدار انتگرال گیر روبرو را تحلیل نمایید.



■ **حل)**

چون پایه منفی آپ امپ از طریق C به خروجی اتصال پیدا کرده است، فیدبک منفی برقرار است و مدار در ناحیه خطی است.

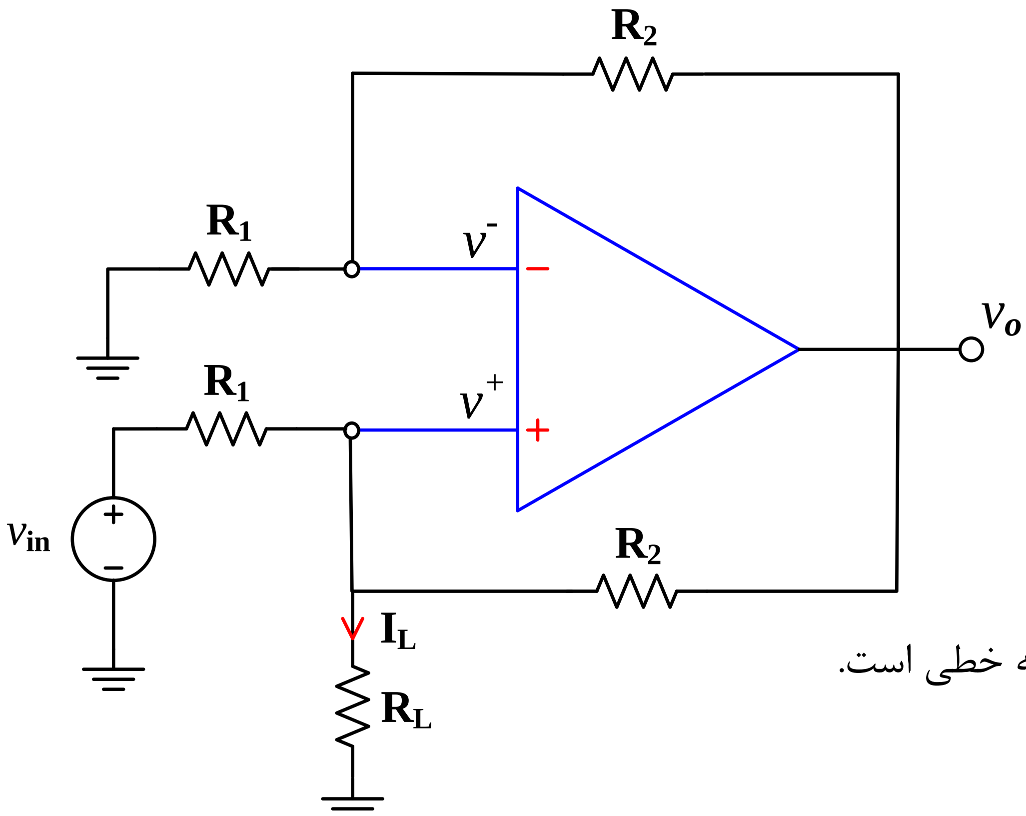
$$\left.\begin{aligned} v^- &= v^+ = 0 \\ I^- &= I^+ = 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{KCL در گره منفی ورودی}} v_C = v_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C dt \;\;,\;\; i_C = \frac{v_{in}}{R_1}$$

با فرض صفر بودن ولتاژ اولیه خازن، به دست می آید:

$$v_o = 0 - v_C = -\frac{1}{R_1 C}\int_0^t v_{in} dt$$

****

❑ **مثال)** مدار منبع جریان روبرو را تحلیل نمایید.



■ **حل)**

در مدار مقابل، فیدبک منفی برقرار است و مدار در ناحیه خطی است.

$$v^- = v^+ = 0$$

$$I^- = I^+ = 0$$

KCL: در گره منفی $I^- + \frac{v^-}{R_1} + \frac{(v^- - v_o)}{R_2} = 0 \ \rightarrow \ \frac{v^-}{R_1} + \frac{v^-}{R_2} = \frac{v_o}{R_2}$

KCL: در گره مثبت $I^+ + \frac{(v^+ - v_{in})}{R_1} + \frac{(v^+ - v_o)}{R_2} + I_L = 0$

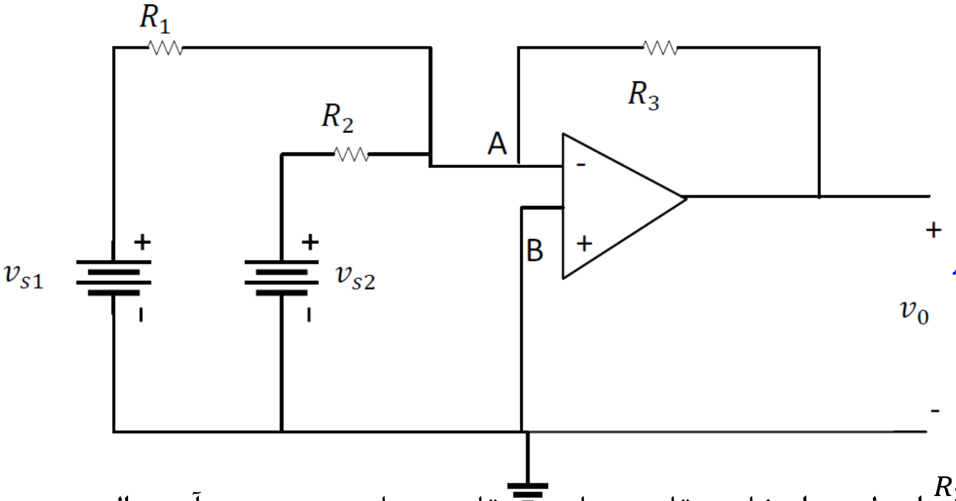
از مقایسه دو رابطه بالا و توجه به اینکه $v^- = v^+ = 0$ خواهیم داشت:

$$I_L = \frac{v_{in}}{R_1}$$

رابطه به دست آمده مستقل از مقدار R_L است.

****

❑ **مثال)** مدار Op-Amp روبرو را تحلیل نمایید.



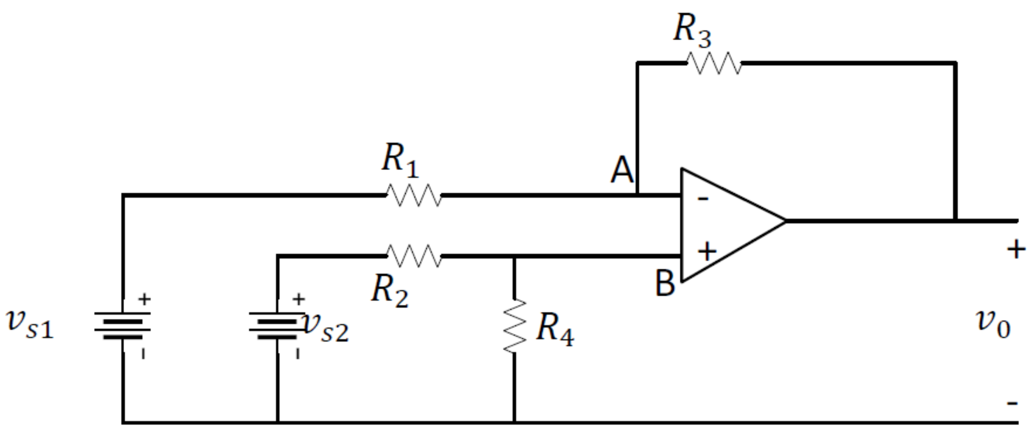
■ **حل)**

KCL در گره A
$$\frac{0-v_{s1}}{R_1}+\frac{0-v_{s2}}{R_2}+\frac{0-v_{s3}}{R_3}=0 => v_0=-\frac{R_3}{R_1}v_{s1}-\frac{R_3}{R_2}v_{s2}$$

این مدار ترکیب خطی دو ولتاژ v_{s2}و v_{s1} را با ضرایب دلخواه $\frac{R_3}{R_1}$ و $\frac{R_3}{R_2}$ از طریق انتخاب مقادیر مناسب مقاومت ها به وجود می آورد. البته به شرطی که آپ امپ اشباع نشود.

****

❑ **مثال)** مدار Op-Amp روبرو را تحلیل نمایید.



■ **حل)**

فرض کنید پتانسیل سرهای B و A آپ امپ هردو V باشد:

KCL در گره A
$$\frac{v-v_{s1}}{R_1}+\frac{v-v_0}{R_3}=0$$

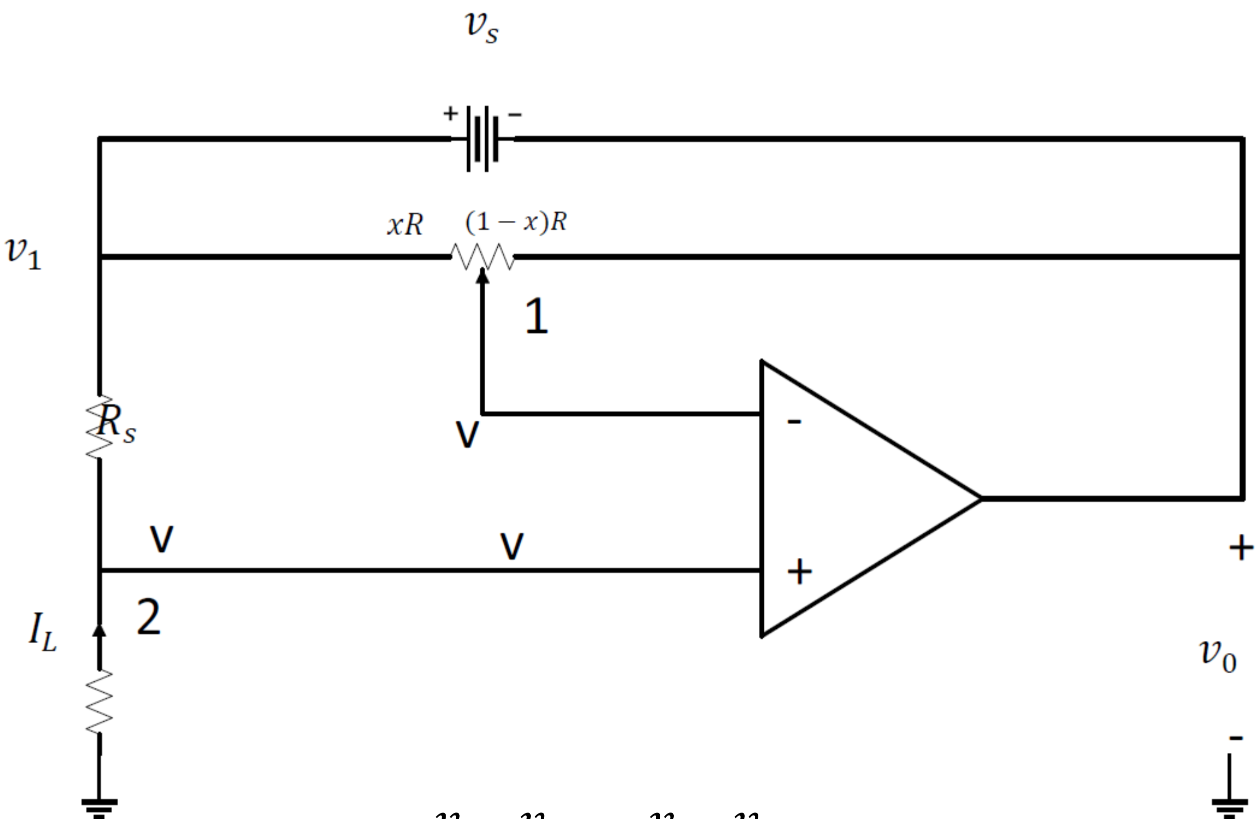
KCL در گره B
$$\frac{v-v_{s2}}{R_2}+\frac{v}{R_4}=0$$

$$v_0=\frac{R_4(R_1+R_3)}{R_1(R_2+R_4)}v_{s2}-\frac{R_3}{R_1}v_{s1}\xrightarrow[R_3\,=\,R_4]{R_1\,=\,R_2}v_0=\frac{R_3}{R_1}(v_{s2}-v_{s1})$$

این مدار را تقویت کننده تفاضلی گویند زیرا اختلاف ولتاژ $v_{s2}-v_{s1}$ را با ضریب $\frac{R_3}{R_1}$ تقویت می کند البته به شرطی که آپ امپ اشباع نشود.

****

❑ **مثال)** در مدار Op-Amp روبرو I_L را به دست آورده و کارکرد مدار را بیان نمایید.



■ **حل)**

KCL در گره ۱ $\quad \dfrac{v-v_1}{xR} + \dfrac{v-v_0}{(1-x)R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad v - v_1 + xv_1 - xv_0 = 0$

با توجه به اینکه $v_s = v_1 - v_0$ اگر مقدار $v_0 = v_1 - v_s$ جایگزین کنیم، نتیجه می شود:

$$v - v_1 = -xv_s \qquad (2)$$

KCL در گره ۲ $\quad \dfrac{v-v_1}{R_s} + I_L = 0$

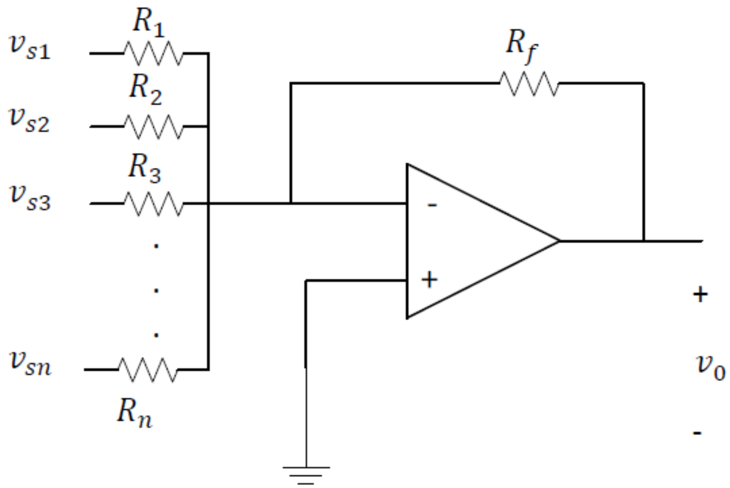
$$I_L = \frac{x}{R_s} v_s$$

یعنی منبع جریان نابسته ای داریم که مقدار آن با تغییر x تنظیم می شود.

****

❑ **مثال)** مدار Op-Amp روبرو را برای تحلیل نمایید.

■ **حل)**

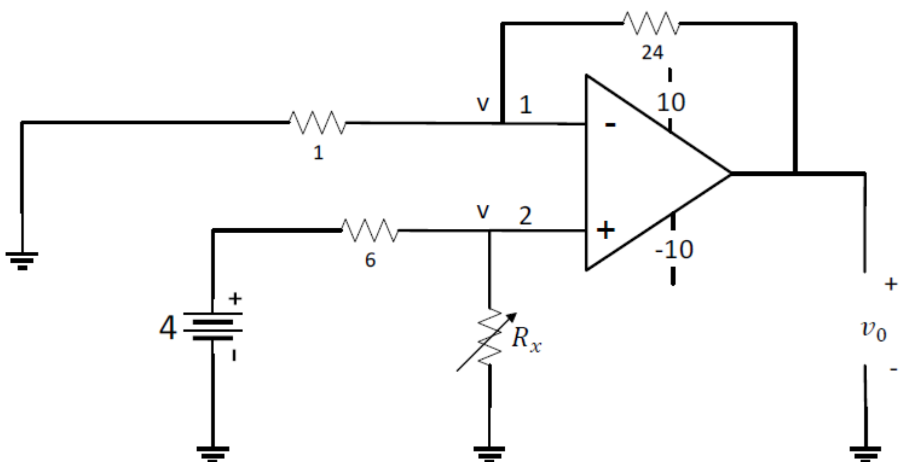


با تعمیم مدار آپ امپ ترکیب خطی دو ولتاژ می توان به مدار آپ امپ ترکیب خطی n ولتاژ به شکل زیر رسید (ترکیب خطی n ولتاژ ورودی):

$$v_0 = -\frac{R_f}{R_1}v_{s1} - \frac{R_f}{R_2}v_{s2} - \cdots - \frac{R_f}{R_n}v_{sn}$$

****

❑ **مثال)** در مدار شکل مقابل مقدار R_x چقدر باشد تا Op-Amp در ناحیه خطی کار کند.



■ **حل)**

KCL در گره ۱ $\quad \frac{v}{4} + \frac{v - v_0}{24} = 0 \Longrightarrow 7v = v_0$

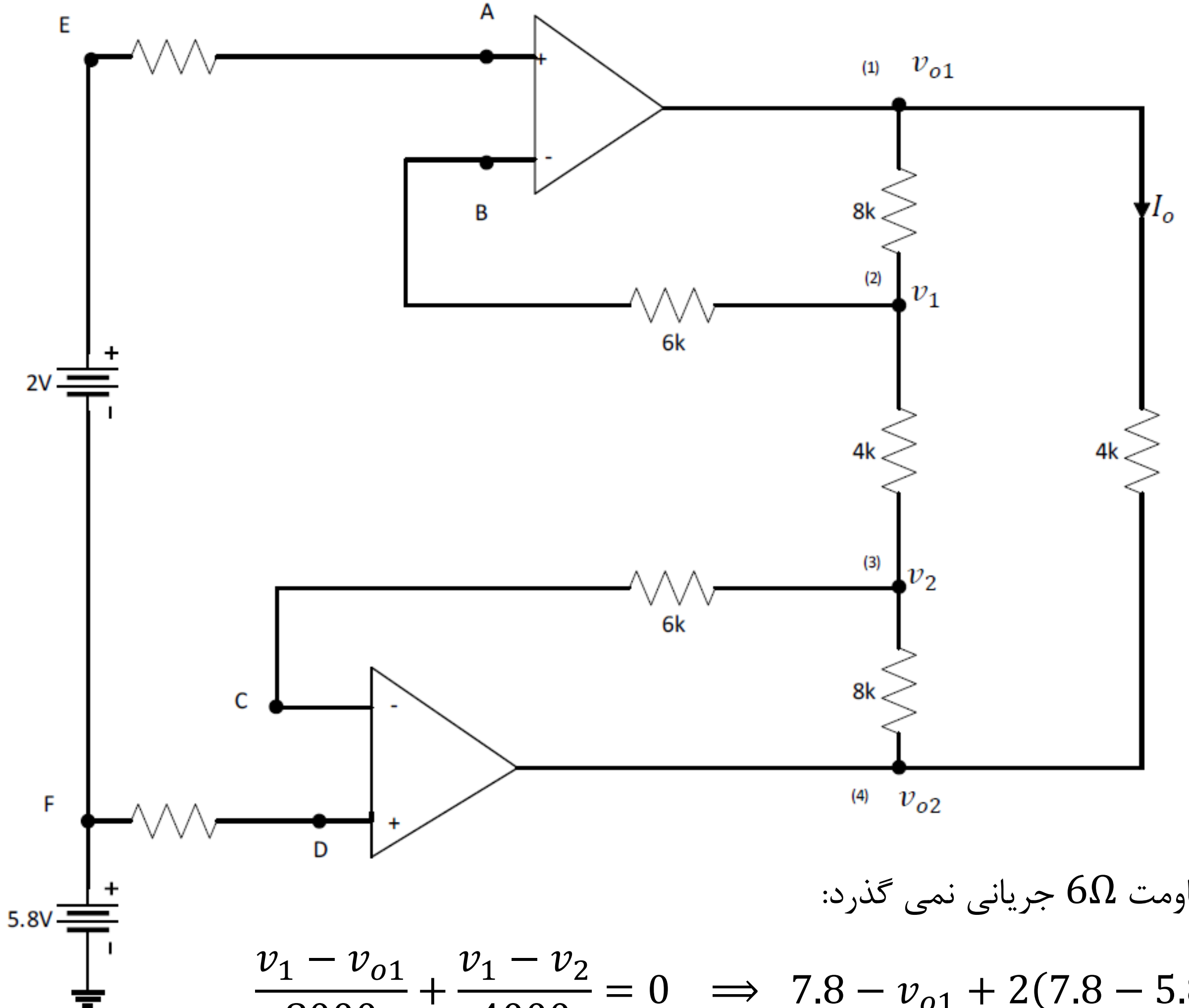
KCL در گره ۲ $\quad \frac{v-4}{6} + \frac{v}{R_x} = 0 \Longrightarrow v = \frac{4R_x}{6+R_x}$

$$\longrightarrow v_0 = 7\frac{4R_x}{6+R_x} = \frac{28R_x}{6+R_x}$$

برای آنکه آپ امپ در ناحیه خطی کار کند باید:

$$-10 < \frac{28R_x}{6+R_x} < 10 \Rightarrow R_x < \frac{10}{3}$$

****



❑ **مثال)** در مدار شکل مقابل مقدار I_o را محاسبه نمایید.

■ **حل)**

پتانسیل نقطه F برابر 5.8V است.
پتانسیل نقطه E برابر $2 + 5.8 = 7.8\text{V}$ است.
چون جریان ورودی Op-Ampها صفر است، پس پتانسیل نقاط B و A نیز 7.8V و پتانسیل نقاط D و C نیز 5.8V است.
چون جریان ورودی آپ امپ ها صفر است پس v_1 برابر پتانسیل نقطه B یعنی 7.8V است.
به طریق مشابه v_2 برابر پتانسیل نقطه C یعنی 5.8V است یعنی:

$$v_1 = 7.8V \ , v_2 = 5.8V$$

با نوشتن KCL در گره (2) و توجه به اینکه از مقاومت 6Ω جریانی نمی گذرد:

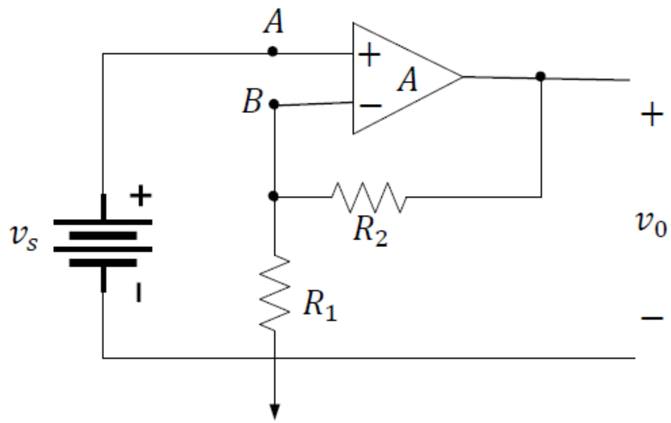
$$\frac{v_1 - v_{o1}}{8000} + \frac{v_1 - v_2}{4000} = 0 \implies 7.8 - v_{o1} + 2(7.8 - 5.8) = 0 \quad \Rightarrow v_{o1} = 11.8\,V$$

با نوشتن KCL در گره (3) و توجه به اینکه از مقاومت 6Ω جریانی نمی گذرد:

$$\frac{v_2 - v_{o2}}{8000} + \frac{v_2 - v_1}{4000} = 0 \implies 5.8 - v_{o2} + 2(5.8 - 7.8) = 0 \quad \Rightarrow v_{o2} = 1.8\,V$$

$$\longrightarrow \quad I_o = \frac{v_{o1} - v_{o2}}{4000} = \frac{11.8 - 1.8}{4000} = \frac{10}{4000} = \frac{1}{400} = 2.5\,mA$$

****



❑ نمونه ای از عملکرد یک Op-Amp در حالت بهره غیربینهایت. یعنی:

$$\boldsymbol{v_o = A(v_A - v_B)}$$

در این شرایط، دیگر لزومی ندارد سرهای آپ امپ هم پتانسیل باشند.

KCL در گره B $\quad \frac{v_B}{R_1} + \frac{v_B - v_o}{R_2} = 0 \Rightarrow v_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o$

ولتاژ گره A برابر v_s است پس:

$$v_o = A(v_A - v_B) = A\left[v_s - \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o\right]$$

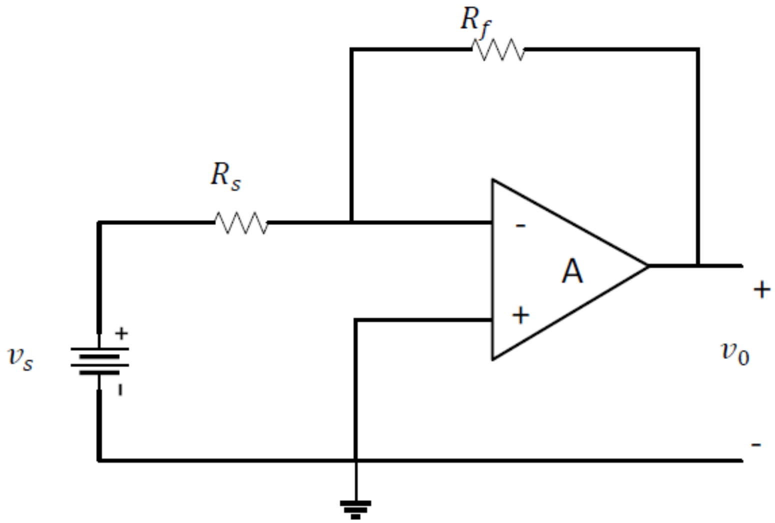
فرض کنید $\frac{R_1}{R_1+R_2} = \beta$ و بنابراین:

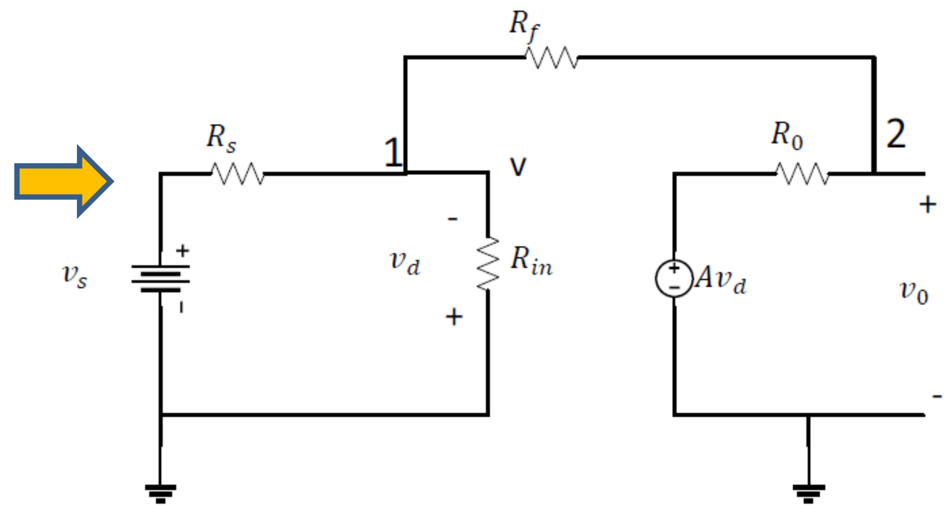
$$v_o = A[v_s - \beta v_o] \Rightarrow v_o = \frac{A}{1+\beta A} v_s$$

روشن است اگر A به سوی بی‌نهایت میل کند رابطه به صورت $v_o = \frac{1}{\beta} v_s$ در می‌آید.

❖ **بهره حلقه:** حاصلضرب βA را **بهره حلقه** گویند و مادامی که بهره حلقه بقدر کافی از یک بزرگتر باشد، مدل Op-Amp با بهره محدود همان نتیجه مدل Op-Amp ایده‌آل را به دست می‌دهد.

❑ نمونه ای دیگر از استفاده از مدل غیرایده آل **Op-Amp** با بهره غیربینهایت برای حل مدار (پیچیدگی های حل زیاد می شود):





KCL در گره ۱
$$\frac{v - v_s}{R_s} + \frac{v}{R_{in}} + \frac{v - v_o}{R_f} = 0$$

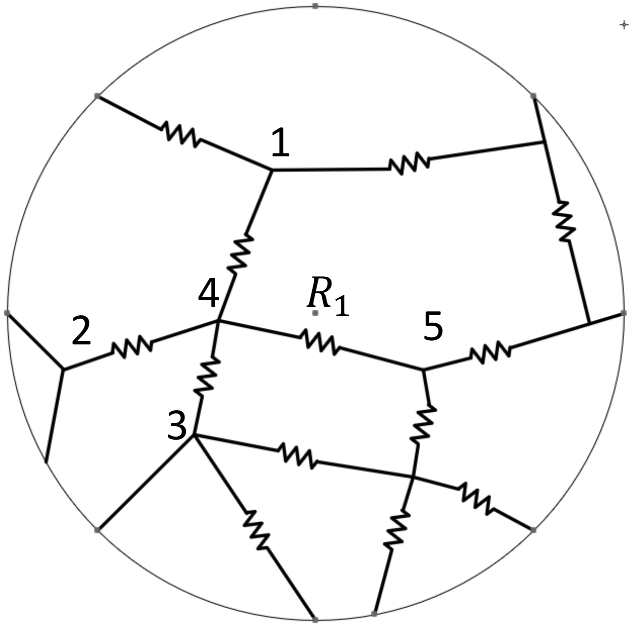
KCL در گره ۲
$$\frac{v_o - v}{R_f} + \frac{v_o - Av_d}{R_o} = 0$$

توجه کنید که $v_d = -v$ و با حذف v از دو معادله فوق به دست می آوریم:

$$v_o = \frac{-A + \dfrac{R_o}{R_f}}{\dfrac{R_s}{R_f}\left(1 + A + \dfrac{R_o}{R_{in}}\right) + \dfrac{R_s}{R_{in}} + 1 + \dfrac{R_o}{R_f}} v_s$$

- با غیرایده آل فرض کردن مشخصه های Op-Amp، تحلیل مدار دارای پیچیدگی های بیشتر خواهد شد و رابطه طولانی تر می گردد (اما دقیق تر، زیرا هیچ Op-Amp ایده آل مطلق نیست).

❑ مثالی از کاربرد Op-Amp در اندازه گیری مقاومت در یک شبکه مداری، بدون جدا کردن آن از مدار.



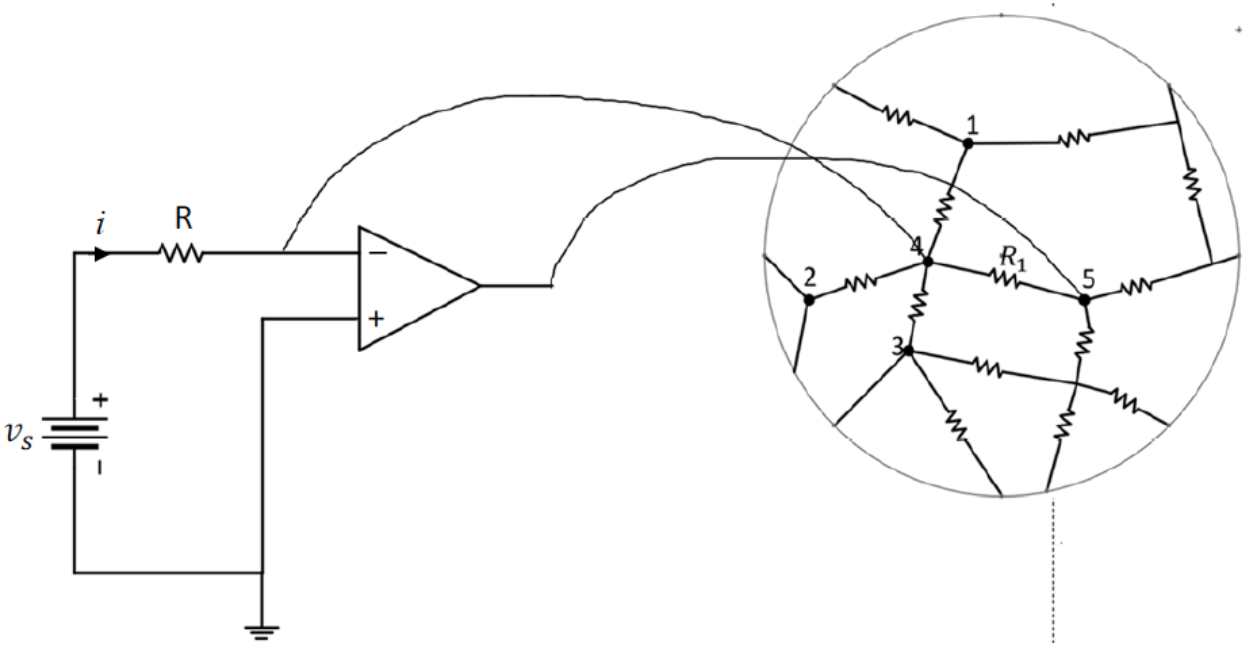
فرض کنید هدف پیدا کردن مقاومت R_1 وصل شده میان گره های ۴ و ۵ باشد. اگر اهم متر را میان هر دو سر مدار قرار دهیم فقط مقاومت معادل دیده شده در آن دو سر را به دست می دهد نه مقاومت آن المان بخصوص.

حال مدار زیر را بسته و مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱- سر ۴ مقاومت R_1 را به سر منفی آپ امپ و سر ۵ را به سر خروجی وصل می کنیم.

۲- سر دوم تمام مقاومتهای وصل شده به گره ۴ را زمین می کنیم (۱ و ۲ و ۳).

۳- جریانی که از سر منفی آپ امپ وارد مقاومت R_1 می شود تنها می تواند از سر ۵ خارج شود زیرا دیگر سر های وصل شده به گره ۴ بخاطر زمین شدن با آن هم پتانسیل شده اند.



$$i = \frac{v_s}{R}$$

$$v_5 = R_1 i = R_1 \frac{v_s}{R}$$

$$\rightarrow R_1 = \frac{v_5}{v_s} R$$

بدین ترتیب مقاومت R_1 را بدون قطع اتصالات مداری آن تعیین می کنیم.